△ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 1 △

R4

$x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - x = x^2\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x}\right)$ pour tout réel x non nul.

On $\begin{cases} \cos(y) \xrightarrow[y\to 0]{} \cos(0) = 1 \text{ car } \cos \text{ est continue} \\ \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0 \end{cases}$, donc $\boxed{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to -\infty]{} 1}$. Or $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$.

Donc $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 1$. Or $x^2 \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty$. Par multiplication, $x^2\cos(1/x^2) - x \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty$

R5

Fixons un réel a. On trouve un entier $p \geq 0$ tel que $p \geq \frac{|a|}{2\pi}$. Ainsi $2\pi p \geq |a|$.

Soit $k \geq p$ entier. On a $f'(x) = -x\sin(x) \leq 0$ pour tout x dans $I = [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ $f(2k\pi) = 2k\pi$ et $f(2k\pi+\pi) = -2k\pi - \pi \leq -2k\pi$.

Donc $a \in [f(2k\pi+\pi), f(2k\pi)]$. Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre que $f(x) = a$ a une solution dans I, donc dans $[2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

Cela vaut pour tout entier $k \geq p$, donc $f(x) = a$ a une infinité de solutions réelles.

L1 $P(A) = \frac{4}{10}$	**L2** $(P_1) : y + 2z = 2$
L3 $(P_2) : x + 2y - 4z - \frac{25}{2} = 0$	**L4** $x + z = 0$
L5 $f'(x) = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}$	**L6** $\lim\limits_{+\infty} f = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -1$
L7 $\varphi(y) = \frac{1-y^2}{2}$	**L8** $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3}$
L9 $\lim\limits_{u\to 0} \frac{1}{u}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2$	**L10** $f'(x) = -x\sin(x)$