Nom et Prénom :	Code Sujet : ◯◯◯

A B C D E F G H K L M N P R S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

◯ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option B ◯

R1 Pour tout entier $n \geq 1$, il y a un nombre fini de mots de longueur n.
On construit un mot infini u comme suit :
- on met bout à bout tous les mots de longueur 1 (dans un ordre arbitraire)
puis tous les mots de longueur 2 (dans un ordre arbitraire) etc
Le mot infini u vérifie alors que "$S(u)$" contient tous les "mots finis" "à n fixé".

R2 On suppose u d-périodique. Soit v un sous-mot de u, de longueur i.
$v = u_k u_{k+1} \cdots u_{k+i-1}$ pour un entier $k \geq 0$.
On divise $k = qd + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$
Comme u est d-périodique il vient $v = u_r u_{r+1} \cdots u_{r+i-1}$
Ainsi v prend au plus d valeurs (au plus le nombre de r possibles)
CONCLUSION : $P_i(u) \leq d$.

R3 Par hypothèse $f_{a,b}(0) = 0v^{(0)}$ pour un mot fini $v^{(0)}$.
On prolonge $v^{(0)}$ en une suite $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de mots finis telle que
$v^{(n+1)} = f_{a,b}(v^{(n)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On construit $u = 0 v^{(0)} v^{(1)} \cdots v^{(n)} \cdots$ (en collant les mots $v^{(i)}$).
Alors $f_{a,b}(u) = f_{a,b}(0) f_{a,b}(v^{(0)}) f_{a,b}(v^{(1)}) \cdots f_{a,b}(v^{(n)}) \cdots$
$= 0 v^{(0)} v^{(1)} v^{(2)} \cdots v^{(n+1)} \cdots = u$.

R4
D'abord $|u_n| = \left|\cos\frac{x}{2}\right| \times \cdots \times \left|\cos\frac{x}{2^n}\right| \leq 1^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
(somme de réels positifs).

D'après M56 il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit croissante ou décroissante.
Donc $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante et majorée (par 1) / ou " " décroissante et minorée (par -1)} Dans tous les cas, elle converge vers un réel ℓ.
Ainsi u converge aussi vers ℓ. Enfin $-1 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 0$, donc $-1 \leq \ell \leq 1$ en passant à la limite.