Nom et Prénom :

Code Sujet : ◯ ◯ ◯

A B C D E F G H K L M N P R S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

△ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option A △

R4 Soit x un entier de la forme $2^m p^n$ où $\begin{cases} m, n \text{ sont dans } \mathbb{N} \\ p \text{ premier impair.} \end{cases}$

Alors $\sigma(x) = \sigma(2^m)\sigma(p^n)$. x parfait $\iff \sigma(x) = 2x \iff 2^{m+1}p^n = \sigma(2^m)\sigma(p^n)$

Or $\sigma(p^n) = 1 + p + \cdots + p^n = 1 + p(1 + \cdots + p^{n-1})$ est premier avec p donc avec p^n

De même $\sigma(2^m)$ est premier avec 2 donc avec 2^{m+1}.

Supposons x parfait. Par Gauss, $\sigma(p^n)$ divise 2^{m+1} et $\sigma(2^m)$ divise p^n

comme $\sigma(p^n)\sigma(2^m) = 2^{m+1}p^n$, il vient $\sigma(p^n) = 2^{m+1}$ et $\sigma(2^m) = p^n$

La deuxième égalité se récrit $2^{m+1} = 1 + p^n$. Or $\sigma(p^n) = 1 + p + \cdots + p^n$,

donc la première égalité donne $\boxed{n = 1}$ Ensuite $p = \sigma(2^m) = 2^{m+1} - 1$,

et ainsi p est de Mersenne. Finalement $\boxed{x = \frac{p+1}{2} \cdot p}$

Réciproquement, soit p un nombre de Mersenne. On écrit $p = 2^m - 1$, où m est entier et $m \geq 2$. On pose $x = 2^{m-1}p$. Alors $x = \frac{p+1}{2}p$

et $\sigma(x) = \sigma(2^{m-1})\sigma(p) = (2^m - 1) \cdot (1 + p) = 2^m p = 2x$.

Ainsi x est parfait.

CONCLUSION Les solutions sont les nombres de la forme $\frac{p+1}{2}p$ où p est un nombre de Mersenne.

L1 Le pgcd de 1636 et 1227 est 409

L2 Le ppcm de 1636 et 1227 est 4908

L3

L4 $\sigma(144) = 403$

$\sigma(105) = 192$

L5 Pour $a = b = 2$,

$\sigma(ab) = 7$ et $\sigma(a)\sigma(b) = 9$

L6 $\sqrt[8]{2}\, e^{-i\pi/16}$, $\sqrt[8]{2}\, e^{7i\pi/16}$

$-\sqrt[8]{2}\, e^{-i\pi/16}$, $-\sqrt[8]{2}\, e^{7i\pi/16}$

L7 Ce sont les nombres réels.

L8 Ce sont les nombres de la forme $\alpha e^{i\theta/2}$ où α est réel

L9 Ce sont 0 et les éléments de U_{n+1}.