



2021

---

## Mathématiques Générales

# Épreuve 1

Sujet zéro

Durée : 1h30

---

Code sujet : ○ ○ ●

---

### FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse  $\square$ . Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse  $\triangle$ . Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ○ ou la feuille-réponse  $\triangle$ , selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

### CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

## Exercice 1. Généralités sur les inégalités

Dans les questions **M1** à **M9**, on demande d'évaluer la validité logique des propositions indiquées.

**M1** Deux réels sont systématiquement rangés dans le même ordre que leurs doubles.

A Faux     B Vrai

**M2** Lorsque  $x$  est un réel non nul, l'inégalité  $x < \frac{1}{2}$  permet d'affirmer que  $\frac{1}{x} < 2$ .

A Faux     B Vrai

**M3** Lorsque  $x$  est un réel non nul, l'inégalité  $x < \frac{1}{2}$  permet d'affirmer que  $\frac{1}{x} > 2$ .

A Faux     B Vrai

**M4** Deux réels sont systématiquement rangés dans le même ordre que leurs carrés.

A Faux     B Vrai

**M5** Lorsque  $a, b, c, d$  sont quatre réels vérifiant  $0 < a < b$  et  $0 < c < d$ , on a systématiquement  $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ .

A Faux     B Vrai

**M6** Lorsque  $a, b, c, d$  sont quatre réels vérifiant  $0 < a < b$  et  $0 < c < d$ , on a systématiquement  $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ .

A Vrai     B Faux

**M7** Lorsque  $x$  et  $y$  sont deux réels vérifiant  $|x + y| = |x| + |y|$ , on a nécessairement  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ .

A Faux     B Vrai

**M8** Pour tout réel  $x$ , on a  $|x^2| = |x|^2$ .

A Faux     B Vrai

**M9** Pour tous réels  $x$  et  $y$ , l'égalité  $|x| = |y|$  est équivalente à  $x^2 = y^2$ .

A Faux     B Vrai

Dans les trois dernières questions de cet exercice, on donne deux réels  $x > 0$  et  $y > 0$  et on considère les réels

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad b = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \text{et} \quad c = \frac{2xy}{x+y}.$$

**M10** Laquelle des affirmations suivantes est systématiquement vraie ?

**A**  $b \leq a$        **B** Aucune d'entre elles        $a \leq b$

**M11** Laquelle des affirmations suivantes est systématiquement vraie ?

$c \leq a$        **B** Aucune d'entre elles       **C**  $a \leq c$

**M12** Laquelle des affirmations suivantes est systématiquement vraie ?

**A**  $b \leq c$        **B** Aucune d'entre elles        $c \leq b$

## Exercice 2. Probabilités

Dans tout l'exercice,  $A$  et  $B$  désignent deux événements d'un même univers. On considère les probabilités de divers événements construits à partir de  $A$  et  $B$ , ainsi que la notion d'indépendance.

**M13** On suppose que  $A$  et  $B$  sont indépendants et que  $P(A) = 0,4$  et  $P(B) = 0,6$ . Alors,  $P(A \cap B)$  vaut :

**A** 0,15       **B** 0,2       **C** 0,27       0,24       **E** 0,8

**M14** On suppose que  $P(A) = \frac{2}{5}$ ,  $P(B) = 0,3$  et  $P(A \cap B) = 0,15$ . Alors :

$A$  et  $B$  ne sont pas indépendants       **B** on ne peut pas conclure       **C**  $A$  et  $B$  sont indépendants

**M15** On suppose que  $P(A) = 0,3$  et  $P_B(A) = 0,7$ . Alors :

$A$  et  $B$  ne sont pas indépendants       **B**  $A$  et  $B$  sont indépendants       **C** on ne peut pas conclure

**M16** On suppose que  $P(A) = 0,7$  et  $P_B(A) = 0,7$ . Alors :

$A$  et  $B$  sont indépendants       **B** on ne peut pas conclure       **C**  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants

**M17** On suppose que  $P(A) = 0,7$  et  $P_A(B) = 0,7$ . Alors :

- on ne peut pas conclure       **B**  $A$  et  $B$  sont indépendants       **C**  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants

**M18** On suppose que  $P(A) = \frac{1}{5}$ , que  $P(B) = \frac{2}{3}$  et que  $A$  et  $B$  sont indépendants. Alors :

- A**  $P(A \cup B) = \frac{17}{15}$  et  $P_A(B) = \frac{2}{3}$         $P(A \cup B) = \frac{11}{15}$  et  $P_A(B) = \frac{2}{3}$   
 **C**  $P(A \cup B) = \frac{11}{15}$  et  $P_A(B) = \frac{1}{4}$        **D**  $P(A \cup B) = \frac{2}{15}$  et  $P_A(B) = \frac{2}{3}$   
 **E**  $P(A \cup B) = \frac{7}{15}$  et  $P_A(B) = \frac{2}{3}$

**M19** On suppose que  $P(A) = \frac{1}{5}$ , que  $P(B) = \frac{2}{3}$  et que  $A$  et  $B$  sont incompatibles. Alors :

- $P(A \cup B) = \frac{13}{15}$  et  $P_A(B) = 0$        **B**  $P(A \cup B) = 1$  et  $P_A(B) = 0$   
 **C**  $P(A \cup B) = \frac{7}{15}$  et  $P_A(B) = 0$        **D**  $P(A \cup B) = \frac{7}{15}$  et  $P_A(B) = 1$   
 **E**  $P(A \cup B) = \frac{13}{15}$  et  $P_A(B) = 1$

**L1** On suppose que  $A$  et  $B$  sont indépendants et ont la même probabilité. On suppose de plus que  $P(A \cup B) = 0,64$ . Donner la valeur de  $P(A)$ .

## Exercice 3. Puissances

### Résultat admis et notation

Pour n'importe quel réel positif  $x \geq 0$  et n'importe quel entier  $n > 0$ , il existe un unique réel  $y \geq 0$  tel que  $y^n = x$ , et on note ce réel  $\sqrt[n]{x}$  (appelé **racine n-ième** de  $x$ ).

**M20** Le nombre  $(2^3)^2$  est égal à :

- A**  $2^{(2^3)}$        **B**  $2^5$         $2^6$        **D**  $2^9$        **E** aucun des nombres cités

**M21** Le nombre  $(2^2)^3$  est égal à :

- A**  $2^8$        **B**  $2^5$        **C** Aucun des nombres cités        $2^6$        **E**  $2^{(3^2)}$

**M22** Vrai ou faux : pour tout réel  $x$ , on a l'égalité  $\sqrt{x^6} = x^3$ .

- Faux       **B** Vrai

**M23** Vrai ou faux : pour tout réel  $x$ , on a l'égalité  $\sqrt[3]{x^6} = x^2$ .

- A** Faux       Vrai

**M24** Vrai ou faux : Pour tout réel positif  $x$ , on a  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = \sqrt[6]{x}$ .

Faux  **B** Vrai

**M25** Le réel  $\frac{(3^5 2^{-2})^2}{(9^{-1} 2^3)^{-3}}$  vaut :

**A**  $3^7 \times 2^5$    $3^4 \times 2^5$   **C**  $6^4$   **D**  $\frac{2^6}{3^4}$   **E**  $\frac{3^4}{2^5}$

**M26** Le quotient de  $\left(\frac{5^3 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2$  par  $\frac{10^2 \times 5}{2^8}$  vaut :

**A**  $\frac{5^5}{2^2}$    $\frac{1}{2^4 \times 5}$   **C**  $\frac{5}{2}$   **D**  $\frac{1}{5^2 \times 2}$   **E**  $\frac{2^2}{5^4}$

**M27** Le quotient de  $\left(\frac{10^2 3^2}{8 \times 5^2}\right)^2$  par  $\sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$  vaut :

$\frac{1}{2^4}$   **B**  $\frac{5}{2^4}$   **C** 5  **D**  $\frac{1}{5^6}$   **E**  $\frac{1}{2^6}$

## Exercice 4. Géométrie dans l'espace

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

□ **M28** Étant donné deux vecteurs unitaires  $\vec{u}, \vec{v}$  orthogonaux de l'espace, le nombre de vecteurs  $\vec{w}$  de l'espace tels que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit une base orthonormale est :

- A** 1       **B** fini strictement supérieur à 2       **C** 0       **D** infini       **E** 2

□ **M29** On se donne un vecteur non nul  $\vec{u}$  de l'espace. Si trois vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}$  et  $\vec{c}$  vérifient

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = \vec{u} \cdot \vec{b} = \vec{u} \cdot \vec{c} = 0,$$

alors on peut affirmer que :

- les vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}$  et  $\vec{c}$  sont coplanaires  
 **B** les vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}$  et  $\vec{c}$  sont tous colinéaires  
 **C** les vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}$  et  $\vec{c}$  sont deux à deux orthogonaux  
 **D** les vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}$  et  $\vec{c}$  forment une base de l'espace  
 **E** rien de tout cela
- **M30** Soit  $P$  et  $Q$  deux plans de l'espace, de vecteurs normaux respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Laquelle des conditions suivantes est équivalente au parallélisme des plans  $P$  et  $Q$  ?
- A** Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux  
 **B** Il existe un réel  $\lambda < 0$  tel que  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$   
 **C** Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont égaux  
 **D** Il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$   
 Aucune des quatres conditions citées
- **M31** La distance du point  $M(1; 1; 1)$  au plan  $P$  d'équation  $2x - 2y + z - 3 = 0$  vaut :
- A**  $\frac{3}{2}$         $\frac{2}{3}$        **C**  $\frac{7}{3}$        **D** 1       **E**  $\frac{1}{3}$

△ **L2** Donner une équation cartésienne du plan  $P_1$  passant par  $A(-1; 0; 1)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(0; 1; 2)$ .

△ **L3** Donner une équation cartésienne du plan médiateur  $P_2$  du segment  $[C, D]$  où  $C(-1; 3; 1)$  et  $D(0; 5; -3)$ .

□ **M32** Vrai ou faux? Étant donné trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  de l'espace, si  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{v} - \vec{w}$  et  $\vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u} - \vec{w}$  alors  $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u} - \vec{v}$ .

**A** Faux       Vrai

○ **R1** Justifier votre réponse à la question **M32**.

Deux plans  $P$  et  $Q$  sont dits **perpendiculaires** lorsqu'il existe un vecteur normal  $\vec{u}$  à  $P$  et un vecteur normal  $\vec{v}$  à  $Q$  tels que  $\vec{u}$  soit orthogonal à  $\vec{v}$ .

△ **L4** Donner sans justification une équation cartésienne du plan perpendiculaire au plan d'équation  $x-2y-z+1=0$  et passant par les points  $A(0;0;0)$  et  $B(0;1;0)$ .

□ **M33** On se donne un réel  $t$  et on considère les points  $A(1;1;0)$  et  $B(-2;7;t)$ . Pour quelle valeur de  $t$  est-il vrai que tout plan contenant les points  $A$  et  $B$  est perpendiculaire au plan d'équation  $x-2y-z+1=0$ ?

- A**  $-15$      **B**  $15$      **C**  $-3$       $3$      **E** Aucune de ces valeurs

□ **M34** On considère les points  $A(1;1;\sqrt{2})$  et  $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$  et on note  $C$  le symétrique du point  $A$  par rapport au point  $O$  d'origine du repère. Alors  $ABC$  est un triangle :

- A** isocèle non rectangle  
 isocèle rectangle  
 **C** équilatéral  
 **D** rectangle non isocèle  
 **E** rien de tout cela

## Exercice 5. Calculs de dérivées

Dans cet exercice, on demande de calculer les dérivées indiquées.

□ **M35** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $(x+1)\ln x$  est la fonction qui à  $x$  associe :

- A**  $\frac{1}{x}$      **B**  $\frac{x+1}{x}$       $1 + \frac{1}{x} + \ln x$      **D**  $\frac{x}{x+1}$      **E**  $1 + \ln x$

□ **M36** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $\frac{1}{x-e^x}$  est la fonction qui à  $x$  associe :

- A**  $-\frac{1}{x^2} + e^{-x}$       $\frac{e^x-1}{(x-e^x)^2}$      **C**  $\frac{1-e^x}{(x-e^x)^2}$      **D**  $1 - e^{-x}$      **E**  $-\frac{1}{(x-e^x)^2}$

□ **M37** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $\ln(1+e^x)$  est la fonction qui à  $x$  associe :

- $\frac{e^x}{1+e^x}$      **B**  $1$      **C**  $1 + e^x$      **D**  $\frac{1+e^x}{e^x}$      **E**  $\frac{1}{1+e^x}$



**M38** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $e^{x^2-x} + 1$  est la fonction qui à  $x$  associe :

**A** Aucune de ces réponses

**B**  $(x^2 - x)e^{x^2-x}$

**C**  $(x^2 - x)e^{x^2-x} + x$

**D**  $(2x - 1)e^{x^2-x} + x$

**E**  $(2x - 1)e^{x^2-x}$

**M39** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $\sqrt{\frac{1}{3x-1}}$  est la fonction qui à  $x$  associe :

**A**  $-\frac{1}{(\sqrt{3x-1})^3}$

**B**  $\frac{3}{2(\sqrt{3x-1})^3}$

**C**  $-\frac{3}{2(\sqrt{3x-1})^3}$

**D**  $-\frac{3}{(\sqrt{3x-1})^3}$

**E**  $-\frac{1}{2(\sqrt{3x-1})^3}$

**M40** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $xe^{1/x}$  est la fonction qui à  $x$  associe

**A**  $\frac{x+1}{x} e^{1/x}$

**B**  $\frac{x-1}{x} e^{1/x}$

**C**  $\frac{e^{1/x}}{x}$

**D**  $-\frac{e^{1/x}}{x}$

**E**  $e^{1/x}$

**L5** Donner une expression, la plus simplifiée possible, de la dérivée de la fonction  $f$  qui à  $x$  associe  $\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$ .

## Exercice 6. Exponentielles

**M41** Le réel  $e^3 + e^5 + e^7 + e^{19}$  est :

**A** égal à  $e^{1995}$

**B** strictement supérieur à  $e^{1995}$

**C** strictement inférieur à  $e^{1995}$

**M42** Le réel  $e^3 + e^5 + e^7 + e^{19}$  est :

**A** strictement supérieur à  $e^{20}$

**B** strictement inférieur à  $e^{20}$

**C** égal à  $e^{20}$

**M43** Le réel  $2e^{17} + 2e^{18} + 2e^{19}$  est :

**A** strictement supérieur à  $e^{20}$

**B** égal à  $e^{20}$

**C** strictement inférieur à  $e^{20}$

Dans la suite de cet exercice, on considère la fonction  $f$  qui à tout réel  $x$  associe  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

△ **L6** Donner sans démonstration la limite de  $f$  en  $+\infty$  et la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

□ **M44** La fonction  $f$  est :

**A** ni paire ni impaire

**B** paire et impaire

**C** paire

**D** impaire

□ **M45** Laquelle des identités suivantes est vraie ?

**A**  $f(2x) = \frac{1+f(x)^2}{2f(x)}$  pour tout réel  $x$

**B**  $f(2x) = \frac{1+f(x^2)}{2f(x)}$  pour tout réel  $x$

**C**  $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}$  pour tout réel  $x$

**D**  $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x^2)}$  pour tout réel  $x$

**E**  $f(2x) = \frac{2f(x)}{(1+f(x))^2}$  pour tout réel  $x$

△ **L7** Donner (sans démonstration) une fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f'(x) = \varphi(f(x))$  pour tout réel  $x$ .

□ **M46** Vrai ou faux : il existe une seule fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f'(x) = \varphi(f(x))$  pour tout réel  $x$ .

Faux       Vrai

○ **R2** Justifier votre réponse à la question **M46**.

○ **R3** On fixe un réel  $a$  non nul. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on note  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation  $y = e^{ax}$ . Un point  $M$  parcourt  $\mathcal{C}$  : on note  $H$  son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et  $T$  le point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$ . Démontrer que la longueur du segment  $[HT]$  ne dépend pas du point  $M$ .

## Exercice 7. Probabilités et suites

On dispose de deux urnes numérotées 1 et 2.

- L'urne numéro 1 contient 6 boules blanches et 4 boules noires.
- L'urne numéro 2 contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

À chaque instant (à partir de l'instant 1), un joueur pioche une boule au hasard dans une urne, note sa couleur, et la remet dans l'urne. S'il a pioché une boule noire à l'instant  $n$  dans une urne, alors il doit piocher dans l'autre urne à l'instant  $n + 1$ , alors que s'il a pioché une boule blanche à l'instant  $n$  dans une urne, il doit piocher dans cette même urne à l'instant  $n + 1$ . À l'instant initial ( $n = 1$ ), le joueur choisit l'urne dans laquelle piocher de manière aléatoire, avec équiprobabilité.

On note  $p_n$  la probabilité pour que le  $n$ -ième tirage soit réalisé dans l'urne numéro 1.

**M47** La probabilité  $p_1$  vaut :

- A 1       B 0       C  $\frac{4}{10}$        D  $\frac{6}{10}$        E  $\frac{1}{2}$

**M48** La probabilité  $p_2$  vaut :

- A  $\frac{4}{12}$        B  $\frac{1}{2}$        C  $\frac{2}{5}$        D  $\frac{4}{6}$        E  $\frac{6}{10}$

**M49** On dispose de la relation de récurrence  $p_{n+1} = \alpha p_n + \beta$  pour

- A  $\alpha = \frac{4}{5}$  et  $\beta = 0$   
 B  $\alpha = -\frac{1}{5}$  et  $\beta = \frac{4}{5}$   
 C  $\alpha = \frac{2}{5}$  et  $\beta = \frac{2}{5}$   
 D  $\alpha = \frac{1}{5}$  et  $\beta = \frac{3}{10}$   
 E  $\alpha = \frac{2}{5}$  et  $\beta = \frac{1}{5}$

**M50** La suite de terme général  $p_n - x$  est géométrique lorsque  $x$  vaut :

- A  $\frac{1}{5}$        B 1       C  $\frac{1}{3}$        D 0       E  $\frac{2}{5}$

**L8** Donner la limite de la suite  $(p_n)_{n \geq 1}$ .

## Exercice 8. Questions de limites

**M51** Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la quantité  $-5x + x^3 - 2 \ln(x^4)$  tend vers :

- A aucune limite       B 0       C  $-\infty$        D une limite finie non nulle       E  $+\infty$

**M52** Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la quantité  $2e^x - e^{x/2} + (\ln(e^{3x}))^4$  tend vers :

- A  $+\infty$        B aucune limite       C une limite finie non nulle       D  $-\infty$        E 0

□ **M53** Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , la quantité  $2e^x - e^{x/2} + (\ln(e^{3x}))^4$  tend vers :

- A**  $-\infty$      **B** aucune limite     **C** 0     **D** une limite finie non nulle     **E**  $+\infty$

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction qui à tout réel  $x$  associe  $\cos(x)$  est continue.

□ **M54** Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , la quantité  $x \cos x + x^2$  tend vers :

- A**  $+\infty$      **B** 0     **C**  $-\infty$      **D** une limite finie non nulle     **E** aucune limite

□ **M55** Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , la quantité  $x^2 \cos x + x$  tend vers :

- A**  $-\infty$      **B** aucune limite     **C** 0     **D** une limite finie non nulle     **E**  $+\infty$

□ **M56** Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , la quantité  $x^2 \cos(1/x^2) - x$  tend vers :

- A** 0     **B**  $+\infty$      **C**  $-\infty$      **D** une limite finie non nulle     **E** aucune limite

△ **R4** Justifier votre réponse à la question **M56**.

□ **M57** Quand  $u$  tend vers 0, la quantité  $\frac{\ln(1+u)}{u}$  tend vers :

- A** une limite finie non nulle     **B** aucune limite     **C**  $-\infty$      **D** 0     **E**  $+\infty$

□ **M58** Quand  $u$  tend vers 0, la quantité  $\frac{\ln(1+u^2)}{u}$  tend vers :

- A**  $+\infty$      **B** aucune limite     **C** 0     **D**  $-\infty$      **E** une limite finie non nulle

□ **M59** Quand  $u$  tend vers 0, la quantité  $\frac{\ln(1+u)}{u^2}$  tend vers :

- A** aucune limite     **B** 0     **C**  $+\infty$      **D** une limite finie non nulle     **E**  $-\infty$

△ **L9** Donner sans justification la limite de  $\frac{1}{u} \ln \left( \frac{1+u}{1-u} \right)$  quand  $u$  tend vers 0.

□ **M60** Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la quantité  $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$  tend vers :

- A** 1     **B** 0     **C**  $\frac{1}{2}$      **D**  $+\infty$      **E** Rien de tout cela

□ **M61** Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la quantité  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$  tend vers :

- A** Rien de tout cela     **B**  $+\infty$      **C**  $\frac{1}{2}$      **D** 1     **E** 0

**M62** Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la quantité  $\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$  tend vers :

- 1       B Rien de tout cela       C  $\frac{1}{2}$        D  $+\infty$        E 0
- 

## Exercice 9. Une étude de fonction

On considère dans cet exercice la fonction  $f$  qui à tout nombre réel  $x$  associe le nombre réel

$$f(x) = x \cos(x) - \sin x.$$

On admet que les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  sont dérivables et que leurs dérivées vérifient, pour tout réel  $x$ , les relations

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Une fonction est dite **monotone** sur un intervalle lorsque, sur cet intervalle, elle est croissante ou décroissante.

**L10** Donner une expression simple de la dérivée de  $f$ .

**M63** Dans l'intervalle  $[0, \pi]$ , l'équation  $f(x) = 0$  possède :

- A aucune solution       au moins une solution

**M64** La fonction  $f$  est, sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  :

- A à la fois croissante et décroissante  
 décroissante  
 C non monotone  
 D croissante

**M65** Sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est :

- non monotone  
 B à la fois croissante et décroissante  
 C décroissante  
 D croissante

**M66** Dans l'intervalle  $[0, \pi]$ , l'équation  $f(x) = -1$  possède :

- A une infinité de solutions  
 B aucune solution  
 C plusieurs solutions, mais en nombre fini  
 exactement une solution

- M67** Sur l'intervalle  $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ , la fonction  $f$  est :
- A** à la fois croissante et décroissante
  - B** décroissante
  - C** non monotone
  - D** croissante
- M68** Dans l'intervalle  $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ , l'équation  $f(x) = -2$  possède :
- A** exactement une solution
  - B** une infinité de solutions
  - C** aucune solution
  - D** plusieurs solutions, mais en nombre fini
- M69** Dans l'intervalle  $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ , l'équation  $f(x) = 0$  possède :
- A** aucune solution
  - B** plusieurs solutions, mais en nombre fini
  - C** une infinité de solutions
  - D** exactement une solution
- M70** Étant donné un entier  $k \geq 0$ , l'équation  $f(x) = -1$  possède, dans l'intervalle  $[k\pi, (k+1)\pi]$  :
- A** plusieurs solutions quel que soit  $k$
  - B** parfois une infinité de solutions, et parfois un nombre fini, selon l'entier  $k$
  - C** toujours un nombre fini non nul de solutions, mais dépendant de  $k$
  - D** parfois un nombre fini non nul de solutions, parfois aucune solution, selon l'entier  $k$
  - E** exactement une solution quel que soit  $k$
- M71** Étant donné un réel  $a$ , l'équation  $f(x) = a$  d'inconnue  $x$  possède, dans  $\mathbb{R}$  :
- A** une infinité de solutions pour certaines valeurs de  $a$ , et aucune pour d'autres
  - B** une unique solution quel que soit le réel  $a$
  - C** un nombre fini de solutions quel que soit le réel  $a$
  - D** une infinité de solutions quel que soit le réel  $a$
  - E** une infinité de solutions pour certaines valeurs de  $a$ , mais un nombre fini éventuellement nul pour d'autres

△ **R5** Justifiez votre réponse à la question **M71**.

□ **M72** Étant donné un réel  $a$ , l'équation  $f(a) = x$  d'inconnue  $x$  possède, dans  $\mathbb{R}$  :

**A** un nombre fini de solutions quel que soit le réel  $a$

**B** une infinité de solutions quel que soit le réel  $a$

**C** une infinité de solutions pour certaines valeurs de  $a$ , et aucune pour d'autres

**D** une infinité de solutions pour certaines valeurs de  $a$ , mais un nombre fini éventuellement nul pour d'autres

une unique solution quel que soit le réel  $a$

---