TeSciA

2022

Mathématiques Expertes

Épreuve 2, Option A

19 mars 2022

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ○ ○ ●

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ○ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TeSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).
Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES

Exercice 1. Nombres complexes

☐ **M1** Le produit $(1-5i)(2+i)$ vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $-4-9i$ $\boxed{\text{B}}$ $-4+9i$ $\boxed{\text{C}}$ $7-9i$ $\boxed{\text{D}}$ $-7-9i$ $\boxed{\text{E}}$ $7+9i$

☐ **M2** Le nombre complexe $4+2\sqrt{5}\,i$ a pour module :

$\boxed{\text{A}}$ -36 $\boxed{\text{B}}$ 6 $\boxed{\text{C}}$ -6 $\boxed{\text{D}}$ 36 $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{54}$

☐ **M3** L'inverse du nombre complexe $2+3i$ est :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{2}{13}-\dfrac{3i}{13}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{2}{7}-\dfrac{3i}{7}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{3}$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{3}$ $\boxed{\text{E}}$ $-2-3i$

△ **L1** Mettre le quotient $\dfrac{3+2i}{2+i}$ sous la forme $a+ib$, avec a et b réels.

☐ **M4** Le nombre de solutions complexes de l'équation $z^4=1$ est :

$\boxed{\text{A}}$ 3 $\boxed{\text{B}}$ 4 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 0 $\boxed{\text{E}}$ 1

☐ **M5** L'équation $z^2-2z+6=0$ possède pour solutions complexes :

$\boxed{\text{A}}$ $-1+i\sqrt{5}$ et $-1-i\sqrt{5}$

$\boxed{\text{B}}$ $2+2i\sqrt{5}$ et $-2+2i\sqrt{5}$

$\boxed{\text{C}}$ $1+i\sqrt{5}$ et $1-i\sqrt{5}$

$\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{5}+2i$ et $2\sqrt{5}-2i$

$\boxed{\text{E}}$ $2+2i\sqrt{5}$ et $2-2i\sqrt{5}$

☐ **M6** La valeur de $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2022}$ est

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{2^{1011}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{-1}{2^{1011}}$ $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ -1 $\boxed{\text{E}}$ 2

Exercice 2. Arithmétique

△ **L2** Décomposer 264 en facteurs premiers.

☐ **M7** Le plus grand diviseur commun de 360 et 21 est :

[A] 21 [B] 3 [C] 2520 [D] 7 [E] 1

△ **L3** Donner un nombre entier naturel n à trois chiffres tel que les restes de 756 et 537 dans la division euclidienne par n soient respectivement égaux à 49 et 32.

☐ **M8** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n n'est pas premier alors il possède un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

[A] Vrai [B] Faux [C] On ne peut pas conclure

☐ **M9** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Le plus petit diviseur de n strictement supérieur à 1 est premier.

[A] Faux [B] On ne peut pas conclure [C] Vrai

☐ **M10** Le dernier chiffre de 2017^{2222} est :

[A] 5 [B] 7 [C] 3 [D] 9 [E] 1

☐ **M11** La décomposition de 999 en facteurs premiers est :

[A] $999 = 3^4 \cdot 19$ [B] $999 = 23 \cdot 43$ [C] $999 = 3^2 \cdot 11^2$ [D] $999 = 3^3 \cdot 37$

☐ **M12** Pour tout entier naturel n, l'entier $10^{3n} - 1$ est divisible par :

[A] 19 [B] 11 [C] 73 [D] 43 [E] 37

☐ **M13** L'entier $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ est divisible par :

[A] 37 [B] 11 [C] 19 [D] 73 [E] 43

◯ **R1** Justifiez votre réponse à la question **M13**.

☐ **M14** Soit a et b deux entiers premiers entre eux, avec $a < b$. On introduit les paires de nombres :

(1) $a + b$ et $a - b$; (2) a et $a^2 + b^2$; (3) $7a + 8b$ et $6a + 7b$; (4) $2a + 3b$ et $a + 3b$.

Parmi ces paires, exactement deux sont constituées d'entiers premiers entre eux quel que soit le couple (a, b). Il s'agit de :

[A] (1) et (3) [B] (1) et (2) [C] (3) et (4) [D] (2) et (4) [E] (2) et (3)

☐ **M15** Soit n un entier strictement positif. On note $n!$ le produit de tous les entiers de 1 à n, autrement dit $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Que dire alors de l'affirmation « les nombres n et $n! + 1$ n'ont alors pas de diviseur premier commun » ?

[A] On ne peut pas conclure [B] Vrai [C] Faux

◯ **R2** Existe-t-il un plus grand nombre premier ? Justifiez votre réponse en vous appuyant sur la question précédente.

Exercice 3. Mots

Dans cet exercice, on appelle *mot* toute suite finie de 0 et de 1 contenant au moins un chiffre. Par exemple, 11010, 001011 et 00 sont des mots. La longueur d'un mot est alors le nombre de chiffres le constituant : les mots précédents sont de longueurs respectives 5, 6 et 2.

Si u et v sont deux mots, on note $u - v$ le mot obtenu en juxtaposant à la suite de u les chiffres du mot v. Par exemple, si $u = 1101$ et $v = 10001$, alors $u - v = 110110001$.

Si u est un mot, on note $\widehat{u}$ le mot obtenu en inversant l'ordre des chiffres de u. Par exemple, si $u = 1100101$, alors $\widehat{u} = 1010011$. On dit qu'un mot u est un **palindrome** lorsque $u = \widehat{u}$. Par exemple, le mot 1101011 est un palindrome.

Exemples

Dans les questions **M16** à **M18**, on prend $u = 0101$ et $v = 101101$.

☐ **M16** Vrai ou faux ? Le mot u est un palindrome.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M17** Vrai ou faux ? Le mot v est un palindrome.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

△ **L4** Écrire le mot $u - v$.

☐ **M18** Vrai ou faux ? Le mot $u - v$ est un palindrome.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M19** Soit u et v deux mots. Le mot $\widehat{u - v}$ est systématiquement égal à :

$\boxed{\text{A}}$ $\widehat{u} - v$ $\boxed{\text{B}}$ $\widehat{v} - u$ $\boxed{\text{C}}$ $v - \widehat{u}$ $\boxed{\text{D}}$ $\widehat{u} - \widehat{v}$ $\boxed{\text{E}}$ $\widehat{v} - \widehat{u}$

☐ **M20** Soit u un *palindrome*. La propriété « le mot $u - u$ est un palindrome » est :

$\boxed{\text{A}}$ toujours vraie

$\boxed{\text{B}}$ toujours fausse

$\boxed{\text{C}}$ vraie pour certains palindromes u mais pas tous

☐ **M21** Soit u et v deux *palindromes*. La propriété « le mot $u-v$ est un palindrome » est :

A toujours fausse

B vraie pour certains palindromes u et v mais pas tous

C toujours vraie

☐ **M22** La propriété « le mot $u-v-u$ est un palindrome » est :

A vraie lorsque u et v sont des palindromes, mais aussi pour certains mots u et v qui ne sont pas des palindromes

B fausse lorsque u et v sont des palindromes, mais vraie pour certains autres mots u et v qui ne sont pas des palindromes

C vraie lorsque u et v sont des palindromes, et uniquement dans ce cas

D vraie pour certains palindromes u et v mais pas tous

E vraie pour n'importe quels mots u et v

Anti-mots

Étant donné un mot u, on note $\overline{u}$ le mot obtenu en remplaçant tous les "1" de u par des "0", et tous les "0" de u par des "1". Par exemple, si $u = 1100101$, alors $\overline{u} = 0011010$.

On dit qu'un mot u est un **anti-mot** lorsque $\widehat{u} = \overline{u}$. Par exemple,

- le mot $u = 001011$ est un anti-mot car $\widehat{u} = 110100$ et $\overline{u} = 110100$, et ainsi $\widehat{u} = \overline{u}$.
- le mot $u = 001101$ n'est pas un anti-mot car $\widehat{u} = 101100$ et $\overline{u} = 110010$, et ainsi $\widehat{u} \neq \overline{u}$.

☐ **M23** Lequel des mots suivants est un anti-mot ?

A 1001 B 101010 C 1011100 D 1 E 011

☐ **M24** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A Tous les mots u vérifient $\overline{u} = u$

B Certains mots u vérifient $\overline{u} = u$, mais pas tous

C Aucun mot u ne vérifie $\overline{u} = u$

☐ **M25** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A Aucun palindrome n'est un anti-mot

B Certains palindromes sont des anti-mots, mais pas tous

C Tous les palindromes sont des anti-mots

☐ **M26** La propriété « $\overline{u}$ est un palindrome » est :

A vraie lorsque u est un palindrome, et uniquement dans ce cas

B vraie lorsque u est un palindrome, mais aussi pour certains mots u qui ne sont pas des palindromes

C fausse lorsque u est un palindrome, mais vraie pour certains mots u qui ne sont pas des palindromes

D vraie pour certains palindromes u mais pas tous

E vraie pour n'importe quel mot u

☐ **M27** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A Si u est un anti-mot, alors les mots $\overline{u}$ et $\widehat{u}$ peuvent être des anti-mots, mais il y a des exemples d'anti-mots u pour lesquels ce n'est pas le cas

B Si u est un anti-mot, alors les mots $\overline{u}$ et $\widehat{u}$ sont nécessairement des anti-mots

C Si u est un anti-mot, alors les mots $\overline{u}$ et $\widehat{u}$ ne sont pas des anti-mots

◯ **R3** Soit u un mot de longueur *paire*. Démontrer que u est un anti-mot si et seulement s'il existe un mot v tel que $u = v - \widehat{\overline{v}}$.

Nombre de 1

Étant donné un mot u de longueur n ainsi qu'un entier k compris entre 1 et n, on note $s_k(u)$ le nombre d'occurrences du chiffre 1 parmi les k premiers chiffres de u. Par convention, si $k = 0$, on pose $s_0(u) = 0$. Par exemple, pour le mot $u = 11010$:

- On a $s_0(u) = 0$ par convention ;
- Le premier chiffre de u est 1, donc $s_1(u) = 1$;
- Les deux premiers chiffres de u sont $1, 1$, donc $s_2(u) = 2$;
- Les trois premiers chiffres de u sont $1, 1, 0$, donc $s_3(u) = 2$;
- Les quatre premiers chiffres de u sont $1, 1, 0, 1$, donc $s_4(u) = 3$;
- Les cinq premiers chiffres de u sont $1, 1, 0, 1, 0$, donc $s_5(u) = 3$.

☐ **M28** Le nombre $s_4(00101111)$ vaut :

A 0 B 5 C 2 D 1 E 4

☐ **M29** Soit u un mot de longueur n. Si k est un entier compris entre 1 et n, alors le k-ième chiffre du mot u vaut :

A $s_{k+1}(u)$ B $s_{k+1}(u) - s_k(u)$ C $s_k(u) - s_{k-1}(u)$ D $s_k(u)$ E $s_{k-1}(u)$

☐ **M30** Soit u et v deux mots de même longueur n. L'affirmation « si $s_k(u) = s_k(v)$ pour tout entier k compris entre 1 et n, alors $u = v$ » est :

A systématiquement fausse

B vraie pour certains choix de u, v et n, fausse pour d'autres

C systématiquement vraie

☐ **M31** Soit u un mot de longueur n, et k un entier compris entre 1 et n. Alors $s_k(\overline{u})$ est égal à :

A $n - s_k(u)$ B $k - s_k(u)$ C $s_n(u) - s_{n-k}(u)$ D $s_n(u) - s_k(u)$ E $k - s_{n-k}(u)$

☐ **M32** Soit u un mot de longueur n, et k un entier compris entre 1 et n. Alors $s_k(\widehat{u})$ est égal à :

A $s_n(u) - s_{n-k}(u)$

B $n - s_{n-k}(u)$

C $k - s_{n-k}(u)$

D $s_n(u) - s_k(u)$

E $k - s_k(u)$

Exercice 4. Congruences

Dans cet exercice, on considère des suites u à valeurs entières vérifiant une relation de récurrence $(\mathcal{R})$ exprimant u_{n+1} en fonction de u_n et n.

Soit q un entier naturel non nul. On dit que $(\mathcal{R})$ **possède une congruence stable modulo** q lorsqu'il existe un entier m tel que toute suite u à valeurs entières et vérifiant $u_0 \equiv m\ [q]$ et la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ vérifie aussi $u_n \equiv m\ [q]$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Par exemple, la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2$ possède une congruence stable modulo 2 car toute suite u vérifiant cette relation ainsi que $u_0 \equiv 0\ [2]$ vérifie aussi $u_n \equiv 0\ [2]$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Dans les questions **M33** à **M36**, on considère la relation de récurrence

$$(\mathcal{R}_1) : \ u_{n+1} = (u_n)^2 + 1.$$

☐ **M33** Vrai ou faux ? La relation $(\mathcal{R}_1)$ possède une congruence stable modulo 2.

A Faux B Vrai

☐ **M34** Vrai ou faux ? La relation $(\mathcal{R}_1)$ possède une congruence stable modulo 3.

A Faux B Vrai

☐ **M35** Vrai ou faux ? La relation $(\mathcal{R}_1)$ possède une congruence stable modulo 4.

A Faux B Vrai

☐ **M36** On se donne un entier quelconque a, et on considère la suite u vérifiant $u_0 = a$ et la relation de récurrence $(\mathcal{R}_1)$. Vrai ou faux ? Deux termes consécutifs de u n'ont jamais la même parité, et ce quel que soit a.

A Faux B Vrai

On considère à présent la relation de récurrence

$$(\mathcal{R}_2) : \ u_{n+1} = (n^2 + 1)\, u_n.$$

☐ **M37** L'ensemble des $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $(\mathcal{R}_2)$ possède une congruence stable modulo q est :

[A] réduit à un élément

[B] vide

[C] égal à $\mathbb{N}^*$

[D] fini et possède plusieurs éléments

[E] infini mais pas égal à $\mathbb{N}^*$

☐ **M38** Soit u une suite à termes entiers vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R}_2)$. L'affirmation « pour tout entier naturel n, l'entier u_n a la même parité que u_0 » est alors :

[A] vraie [B] fausse

On considère à présent, et jusqu'à la fin de l'exercice, la relation de récurrence

$$(\mathcal{R}_3): \quad u_{n+1} = au_n + b\,,$$

où a est un entier (relatif) différent de 1 et b est un entier (relatif).

Pour les questions **M39** à **M41**, on étudie le cas particulier où $a = 5$ et $b = -1$: la relation de récurrence est donc $u_{n+1} = 5u_n - 1$.

☐ **M39** La relation $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo 3.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M40** La relation $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo 6.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M41** La relation $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo 7.

[A] Faux [B] Vrai

Dans toute la suite, on ne suppose plus que $a = 5$ ni que $b = -1$. Ainsi, a et b sont deux entiers relatifs quelconques vérifiant $a \neq 1$.

☐ **M42** La relation $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q si et seulement si :

[A] $(a-1)$ divise b

[B] il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m = am + b$

[C] il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \equiv am + b\ [q]$

☐ **M43** Vrai ou faux ? Si $a - 1$ et q sont premiers entre eux, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q.

[A] Vrai [B] Faux

☐ **M44** Vrai ou faux ? Si $q = a$, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q.

A Faux B Vrai

☐ **M45** Vrai ou faux ? Si $q = a + 1$ et a est pair, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q.

A Faux B Vrai

☐ **M46** Vrai ou faux ? Si $q = a+1$, a est impair et b est impair, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q.

A Faux B Vrai

☐ **M47** Vrai ou faux ? Si $q = a + 1$, a est impair et b est pair, alors $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q.

A Vrai B Faux

☐ **M48** L'ensemble des entiers $q > 0$ tels que $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo q est toujours :

A vide B réduit à un élément C fini avec plusieurs éléments D infini

☐ **M49** Vrai ou faux ? Il est possible d'ajuster a et b pour que la relation de récurrence $(\mathcal{R}_3)$ possède une congruence stable modulo tout entier $q > 0$.

A Vrai B Faux

Exercice 5. Nombres complexes et géométrie

☐ **M50** Soit $a \in]0, \pi[$. Le nombre complexe $z = -\cos a + i \sin a$ est alors égal à :

A $e^{i(a+\pi)}$ B e^{ia} C e^{-ia} D $e^{i(-a+\pi)}$ E $-e^{ia}$

☐ **M51** Le module et un argument de $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ sont respectivement :

A $\sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{6}$

B $\sqrt{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$

C $\sqrt{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$

D $\sqrt{2}$ et $-\frac{5\pi}{6}$

E $\sqrt{2}$ et $-\frac{\pi}{6}$

☐ **M52** Soit z un nombre complexe. Le nombre $|1 + iz|^2 + |z + i|^2$ est alors égal à :

A $4 - 2|z|^2$ B $4|z| + 4$ C $2|z|^2 + 2$ D $2|z| + 2$ E $4|z|^2 + 4$

☐ **M53** Soit z et z' deux nombres complexes. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

A $|z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \sqrt{2}\,|z|$

B $|z| + |z'| \leqslant \frac{1}{2}(|z+z'| + |z-z'|)$

C $|z| + |z'| \leqslant \frac{1}{4}(|z+z'| + |z-z'|)$

△ **L5** Combien y a-t-il de nombres complexes z vérifiant $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$?

☐ **M54** On pose $z = -1 + i\sqrt{3}$. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

A La suite de terme général $\mathrm{Re}(z^n)$ est convergente

B $\mathrm{Re}(z^n)$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$

C $\mathrm{Re}(z^n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

D Pour tout réel M, il existe un entier naturel n tel que $z^n \in \mathbb{R}$ et $z^n > M$

☐ **M55** On rappelle que les racines quatrièmes de l'unité sont les nombres complexes z tels que $z^4 = 1$. Soit n un entier naturel non nul. La somme des puissances n-ièmes des racines quatrièmes de l'unité vaut :

A 0 quelle que soit la valeur de n

B 4 quelle que soit la valeur de n

C 4 si 8 divise n

D 4 si et seulement si 8 divise n

E 4 lorsque 8 divise n, et 0 dans le cas contraire

Exercice 6. Transformations complexes

Le plan euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal, ce qui permet de repérer chaque point par une affixe.

On note f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ par

$$f(z) = \frac{2iz-5}{z-2i}\cdot$$

On note A le point d'affixe $2i$, et F l'application définie sur $\mathcal{P} \setminus \{A\}$, et qui au point M d'affixe z associe le point $F(M)$ d'affixe $f(z)$.

Un point M de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ est dit **invariant par** F lorsque $F(M) = M$.

☐ **M56** Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

A F admet exactement quatre points invariants

B F admet exactement un point invariant

C F admet une infinité de points invariants

D F a exactement deux points invariants

E F n'admet aucun point invariant

△ **L6** Expliciter les points invariants par F.

On note $\mathcal{D}$ la droite de $\mathcal{P}$ passant par les points d'affixes respectives 0 et i.

☐ **M57** Pour une droite Δ passant par A, on considère la propriété $P(\Delta)$ affirmant que $\Delta \setminus \{A\}$ est envoyé par F dans une droite passant par A. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

- $\boxed{\text{A}}$ La seule droite Δ passant par A et pour laquelle $P(\Delta)$ est vraie est $\mathcal{D}$
- $\boxed{\text{B}}$ Il existe plusieurs droites Δ passant par A et pour lesquelles $P(\Delta)$ est vraie, mais elles sont en nombre fini
- $\boxed{\text{C}}$ La propriété $P(\Delta)$ est vraie pour toute droite Δ passant par A
- $\boxed{\text{D}}$ Il n'existe aucune droite Δ passant par A et pour laquelle $P(\Delta)$ est vraie

☐ **M58** Pour un cercle $\mathcal{C}$ de centre A, on considère la propriété $Q(\mathcal{C})$ affirmant que $\mathcal{C}$ est envoyé par F dans un cercle de centre A. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

- $\boxed{\text{A}}$ Il existe un et un seul cercle $\mathcal{C}$ de centre A et pour lequel $Q(\mathcal{C})$ est vraie
- $\boxed{\text{B}}$ Il n'existe aucun cercle $\mathcal{C}$ de centre A et pour lequel $Q(\mathcal{C})$ est vraie
- $\boxed{\text{C}}$ La propriété $Q(\mathcal{C})$ est vraie pour tout cercle $\mathcal{C}$ de centre A
- $\boxed{\text{D}}$ Il existe plusieurs cercles $\mathcal{C}$ de centre A et pour lesquels $Q(\mathcal{C})$ est vraie, mais ils sont en nombre fini

☐ **M59** Pour un cercle $\mathcal{C}$ passant par A, on considère la propriété $R(\mathcal{C})$ affirmant que $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ est envoyé par F dans un cercle passant par A. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

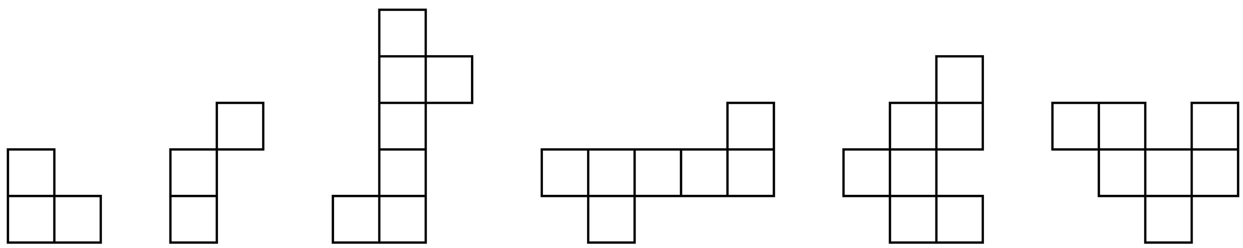
- $\boxed{\text{A}}$ Il existe un et un seul cercle $\mathcal{C}$ passant par A et pour lequel $R(\mathcal{C})$ est vraie
- $\boxed{\text{B}}$ Il n'existe aucun cercle $\mathcal{C}$ passant par A et pour lequel $R(\mathcal{C})$ est vraie
- $\boxed{\text{C}}$ Il existe plusieurs cercles $\mathcal{C}$ passant par A et pour lesquels $R(\mathcal{C})$ est vraie, mais ils sont en nombre fini
- $\boxed{\text{D}}$ La propriété $R(\mathcal{C})$ est vraie pour tout cercle $\mathcal{C}$ passant par A

△ **R4** Justifiez votre réponse à la question **M59**.

Exercice 7. Polyominos

Un **polyomino** est un assemblage de carrés de côté 1, appelés « cellules », collés les uns aux autres le long d'un côté. Deux tels assemblages définissent le même polyomino lorsqu'ils peuvent être transformés l'un en l'autre à l'aide de symétries, de rotations ou de translations. Il existe un seul polyomino à une cellule, représenté par un carré de côté 1. De même, il existe un seul polyomino à deux cellules, représenté par deux cellules accolées.

Dans le dessin suivant :



1 2 3 4 5 6

- Toutes les assemblages présentés représentent un polyomino, à l'exception de la figure 2.
- Les assemblages 3 et 4 représentent le même polyomino car on peut obtenir l'un à partir de l'autre à l'aide d'une symétrie d'axe vertical et d'une rotation.

△ **L7** Combien existe-t-il de polyominos à trois cellules ?

△ **L8** Combien existe-t-il de polyominos à quatre cellules ?

☐ **M60** Le nombre de polyominos à cinq cellules est :

$\boxed{A}$ 10 $\boxed{B}$ 5 $\boxed{C}$ 8 $\boxed{D}$ 12 $\boxed{E}$ 15

Un **polyomino unilatéral** est un assemblage de cellules : deux assemblages représentent le même polyomino unilatéral lorsqu'il est possible de transformer l'un en l'autre uniquement à l'aide de rotations ou de translations.

Dans le dessin ci-dessus, les assemblages 5 et 6 représentent le même polyomino et aussi le même polyomino unilatéral, car on peut obtenir l'un à partir de l'autre à l'aide d'une rotation. En revanche, les assemblages 3 et 4 représentent deux polyominos unilatéraux distincts.

☐ **M61** Le nombre de polyominos unilatéraux à trois cellules est :

$\boxed{A}$ 1 $\boxed{B}$ 2 $\boxed{C}$ 4 $\boxed{D}$ 3

☐ **M62** Le nombre de polyominos unilatéraux à quatre cellules est :

$\boxed{A}$ 7 $\boxed{B}$ 4 $\boxed{C}$ 6 $\boxed{D}$ 3 $\boxed{E}$ 5

☐ **M63** Le nombre de polyominos unilatéraux à cinq cellules est :

$\boxed{A}$ 17 $\boxed{B}$ 12 $\boxed{C}$ 10 $\boxed{D}$ 18 $\boxed{E}$ 15

☐ **M64** Le nombre de polyominos à six cellules est :

$\boxed{A}$ 23 $\boxed{B}$ 25 $\boxed{C}$ 18 $\boxed{D}$ 35 $\boxed{E}$ 31