Nom et Prénom :

Code Sujet : ◯ ◯ ◯

A B C D E F G H K L M N P R S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

◯ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option B ◯

R1 Commençons par une remarque préliminaire.

Soit $x \in \mathbb{Z}$. • Si x est pair alors $E\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ car $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$.

• Si x est impair alors $\frac{x-1}{2} \le \frac{x}{2} < \frac{x-1}{2} + 1$ et $\frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}$

donc $E\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$.

• Supposons n et p de même parité. Alors n et $-p$ aussi, donc $n+p$ est pair et $n-p+1$ est ~~im~~pair. Ainsi $\left| \begin{array}{l} E\left(\frac{n+p}{2}\right) = \frac{n+p}{2} \\ E\left(\frac{n-p+1}{2}\right) = \frac{n-p}{2} \end{array} \right.$.

• Supposons n et p de parités inverses. Alors n et $-p$ aussi, donc $n+p$ et $n-p$ sont pairs. Ainsi $E\left(\frac{n+p}{2}\right) = \frac{n+p-1}{2}$ et $E\left(\frac{n-p+1}{2}\right) = \frac{n-p}{2}$,

R2 Supposons qu'il n'y ait qu'une quantité finie d'entiers n tels que $u_{n+1} > u_n$. Il y a donc un entier n_0 plus grand que ceux-ci. Donc $\forall n \ge n_0, u_{n+1} \le u_n$. Autrement dit, $(u_n)_{n \ge n_0}$ est décroissante. Donc elle converge ou tend vers $-\infty$. Ainsi elle ne tend pas vers $+\infty$, donc u non plus. Le résultat s'obtient donc par contraposition : si u tend vers $+\infty$ alors il existe une infinité d'entiers $n \ge 0$ tels que $u_{n+1} > u_n$.

R3 Pour des mots quelconques v et w, on a clairement :

$\hat{\hat{v}} = v$, $\bar{\bar{v}} = v$, $\hat{\bar{v}} = \bar{\hat{v}}$ et $\overline{v-w} = \bar{v} - \bar{w}$.

• Supposons qu'il existe un mot v tel que $u = v - \overset{\triangle}{v}$.

Alors $\bar{u} = \bar{v} - \overline{\hat{\bar{v}}} = \bar{v} - \hat{\bar{\bar{v}}} = \bar{v} - \hat{v}$ et $\hat{u} = \hat{\hat{\bar{v}}} - \hat{v} = \bar{v} - \hat{v}$.

Ainsi $\bar{u} = \hat{u}$, autrement dit $\boxed{u \text{ est un antimot}}$

• Réciproquement, supposons que u soit un antimot. Notons sa longueur $2n$. Décomposons $u = v - w$ où v et w sont des mots de longueur n.

Alors $\bar{u} = \bar{v} - \bar{w}$ et $\hat{u} = \hat{w} - \hat{v}$, donc $\bar{v} = \hat{w}$ en extrayant les n premières lettres. Puis $w = \hat{\hat{w}} = \hat{\bar{v}}$ et ainsi $\boxed{u = v - \overset{\triangle}{v}}$