TeSciA

Épreuve de Mathématiques Expertes 2023

Exercice 2. Semi-inverses d'une fonction

Note préliminaire : cet exercice est également l'exercice 2 de l'épreuve de Mathématiques Générales Avancées 2023 ; seule la numérotation des questions diffère d'une épreuve à l'autre.

Dans tout cet exercice, on se donne deux fonctions f et g, définies en tout réel et à valeurs réelles. On introduit quatre conditions :

- (f, g) vérifie $\mathcal{C}_1$ lorsque $g(f(x)) = x$ pour tout réel x.
- (f, g) vérifie $\mathcal{C}_2$ lorsque $f(g(y)) = y$ pour tout réel y.
- (f, g) vérifie $\mathcal{C}_3$ lorsque $f(g(f(x))) = f(x)$ pour tout réel x.
- (f, g) vérifie $\mathcal{C}_4$ lorsque $g(f(g(y))) = g(y)$ pour tout réel y.

Par exemple :

- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x, et $g(y) = 2y$ pour tout réel y, les conditions $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont évidemment vérifiées ;
- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x, et $g(y) = y + 1$ pour tout réel y, la condition $\mathcal{C}_1$ n'est pas vérifiée, car l'égalité $\frac{x}{2} + 1 = x$ ne vaut pas pour $x = 0$ (par exemple).

Pour un réel y, on pose $\operatorname{sgn}(y) = 1$ si $y \geqslant 0$, et $\operatorname{sgn}(y) = -1$ si $y < 0$.

On dit qu'une fonction est **constante** lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur.

On introduit enfin les cinq fonctions particulières f_1, f_2, g_1, g_2 et g_3 qui suivent :

- f_1 associe à tout réel x le réel $f_1(x) = e^x$;
- f_2 associe à tout réel x le réel $f_2(x) = x^2$;
- g_1 associe à tout réel y le réel $g_1(y) = \ln(y)$ si $y > 0$, et $g_1(y) = 0$ sinon ;
- g_2 associe à tout réel y le réel $g_2(y) = \sqrt{|y|}$;
- g_3 associe à tout réel y le réel $g_3(y) = \operatorname{sgn}(y) \cdot \sqrt{|y|}$. Par exemple $g_3(-4) = -2$ et $g_3(9) = 3$.

M11 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée par le couple (f_1, g_1).

Méthode et solution : Pour tout réel x, on a $f_1(x) = e^x > 0$ donc $g_1(f_1(x)) = \ln(e^x) = x$. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{vraie.}}$

M12 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée par le couple (f_1, g_1).

Méthode et solution : Il faut faire attention à la définition précise de g_1 (avec conditions sur le signe). Ainsi pour tout réel $y \leqslant 0$ on a $g_1(y) = 0$ donc $f_1(g_1(y)) = e^0 = 1$ donc

$f_1(g_1(y)) \neq y$. C'est en particulier vrai pour au moins une valeur de y (par exemple $y = 0$). Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

M13 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

Méthode et solution : Pour tout réel x on a $g_2(f_2(x)) = \sqrt{|x^2|} = \sqrt{x^2} = |x|$. En particulier $g_2(f_2(-1)) \neq -1$. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

M14 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

Méthode et solution : Pour tout réel y on a $f_2(g_2(y)) = (\sqrt{|y|})^2 = |y|$. À nouveau $f_2(g_2(-1)) \neq -1$. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

M15 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_3$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

Méthode et solution : Soit x un nombre réel. En reprenant le calcul effectué à la question précédente, on voit que $f_2(g_2(f_2(x))) = |f_2(x)|$ et $|f_2(x)| = f_2(x)$ car $f_2(x) = x^2 \geqslant 0$. Ainsi $f_2(g_2(f_2(x))) = f_2(x)$. L'affirmation indiquée est donc $\boxed{\text{vraie.}}$

M16 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_4$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

Méthode et solution : Soit y un nombre réel. En utilisant le calcul effectué pour la question **M14**, on voit que $g_2(f_2(g_2(y))) = g_2(|y|)$ et $g_2(|y|) = g_2(y)$ car $||y|| = |y|$. Ainsi $g_2(f_2(g_2(y))) = g_2(y)$. L'affirmation indiquée est donc $\boxed{\text{vraie.}}$

M17 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

Méthode et solution : Soit x un nombre réel. On a $f_2(x) = x^2 \geqslant 0$ donc $g_3(f_2(x)) = \sqrt{f_2(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$. En particulier $g_3(f_2(-1)) = 1$ puis $g_3(f_2(-1)) \neq -1$. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

M18 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

Méthode et solution : Soit y un nombre réel. Alors $f_2(g_3(y)) = g_3(y)^2 = (\sqrt{|y|})^2 = |y|$. De nouveau, $f_2(g_3(-1)) \neq -1$. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

M19 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_3$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

Méthode et solution : Soit x un nombre réel. Par le calcul effectué pour la question précédente, puisque $f_2(x) \geqslant 0$ on trouve $f_2(g_3(f_2(x))) = |f_2(x)| = f_2(x)$. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{vraie.}}$

M20 Vrai ou faux ? La condition $\mathcal{C}_4$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

Méthode et solution : Soit y un nombre réel. Par le calcul effectué pour la question **M18**, on a $g_3(f_2(g_3(y))) = g_3(|y|)$. Or $g_3(-1) = -1$ et $g_3(|-1|) = g_3(1) = 1$. Il existe donc un réel y tel que $g_3(f_2(g_3(y))) \neq g_3(y)$. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

M21 Vrai ou faux ? Quel que soit le choix des fonctions f et g, si la condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée alors la condition $\mathcal{C}_2$ l'est aussi.

Méthode et solution : Il faut penser aux exemples déjà étudiés ! Dans le cas où $f = f_1$ et $g = g_1$, on a vu que $\mathcal{C}_1$ est vraie mais $\mathcal{C}_2$ est fausse. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

M22 Vrai ou faux ? Quel que soit le choix des fonctions f et g, si les conditions $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont vérifiées alors la condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée.

Méthode et solution : À nouveau, un examen des exemples déjà étudiés permet d'observer que pour $f = f_2$ et $g = g_2$, les conditions $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont vérifiées, mais pas la condition $\mathcal{C}_1$. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

M23 Vrai ou faux ? Quel que soit le choix des fonctions f et g, si la condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée alors les conditions $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont vérifiées.

Méthode et solution : Aucun des exemples précédents ne vient contredire cette affirmation. Il est donc raisonnable de chercher à établir qu'elle est vraie. Prenons donc des fonctions arbitraires f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que le couple (f, g) vérifie la condition $\mathcal{C}_1$. Pour tout réel x on a donc $g(f(x)) = x$ si bien que $f(g(f(x))) = f(x)$ en appliquant f. Ainsi $\mathcal{C}_3$ est vérifiée. Ensuite, pour tout réel y, on a $g(f(g(y))) = g(y)$ en appliquant la condition $\mathcal{C}_1$ au réel $g(y)$. Ainsi $\mathcal{C}_4$ est vérifiée. En conclusion, l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{vraie}}$.

M24 Vrai ou faux ? Si $\mathcal{C}_1$ est vérifiée alors f prend toutes les valeurs réelles possibles.

Méthode et solution : Il n'est pas clair au vu de $\mathcal{C}_1$ que l'affirmation soit vraie. On se penche donc sur les exemples déjà traités. Dans le cas où $f = f_1$ et $g = g_1$ on observe que $\mathcal{C}_1$ est vérifiée (voir la question **M11**) tandis que f ne prend que des valeurs strictement positives. Ainsi, l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse}}$.

M25 Vrai ou faux ? Si $\mathcal{C}_1$ est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles, alors $\mathcal{C}_2$ est vérifiée.

Méthode et solution : Dans aucun des exemples étudiés on ne trouve à la fois que $\mathcal{C}_1$ est vérifiée et que f prend toutes les valeurs réelles possibles, sinon dans l'exemple $f(x) = \frac{x}{2}$ cité dans l'énoncé. Il est donc raisonnable d'essayer de démontrer l'affirmation indiquée. Supposons donc que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée et que f prenne toute les valeurs réelles possibles. Soit y un réel. On veut montrer que $f(g(y)) = y$. Or on sait que $\mathcal{C}_3$ est vérifiée (voir la question **M23**), donc $f(g(f(z))) = f(z)$ pour tout réel z. Comme on sait qu'il existe un réel z tel que $y = f(z)$ (car f prend toutes les valeurs réelles possibles) cela donne $f(g(y)) = y$. La condition $\mathcal{C}_2$ est donc réalisée. Ainsi, l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{vraie}}$.

M26 Vrai ou faux ? Si $\mathcal{C}_3$ est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles, alors $\mathcal{C}_1$ est vérifiée.

Méthode et solution : On peut à nouveau regarder les exemples étudiés. En inversant les rôles des fonctions, on observe d'après **M12** que (g_1, f_1) ne vérifie pas $\mathcal{C}_1$. En revanche

(f_1, g_1) vérifie $\mathcal{C}_1$ par **M11**, donc il vérifie $\mathcal{C}_4$ par **M23**, autrement dit (g_1, f_1) vérifie $\mathcal{C}_3$. Enfin, g_1 prend toutes les valeurs réelles possibles puisqu'elle prend toutes les valeurs prises par la fonction logarithme népérien. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse}}$.

M27 Vrai ou faux ? Si $\mathcal{C}_3$ est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles, alors $\mathcal{C}_1$ est vérifiée.

Méthode et solution : C'est exactement le principe général qu'on a établi dans notre réponse à **M25**. L'affirmation indiquée est donc $\boxed{\text{vraie.}}$

M28 Pour la fonction f qui à x associe $x+1$, on s'intéresse aux fonctions g telles que (f, g) vérifie $\mathcal{C}_1$.

Méthode et solution : On écrit la condition $\mathcal{C}_1$ pour une fonction arbitraire g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: elle signifie ici que $g(x+1) = x$ pour tout réel x. Par changement de variable, il est immédiat qu'elle est vérifiée si et seulement si $g(y) = y - 1$ pour tout réel y. Ainsi, la fonction g qui à tout réel y associe $y-1$ est la seule fonction telle que (f, g) vérifie $\mathcal{C}_1$. La bonne réponse est donc : $\boxed{\text{il existe exactement une fonction } g \text{ telle que } \mathcal{C}_1 \text{ soit vérifiée.}}$

M29 Pour la fonction f qui à x associe $|x|$, on s'intéresse aux fonctions g telles que (f, g) vérifie $\mathcal{C}_1$.

Méthode et solution : Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le couple (f, g) vérifie $\mathcal{C}_1$ si et seulement si $g(|x|) = x$ pour tout réel x. C'est impossible car cette condition impliquerait simultanément $g(1) = 1$ et $g(1) = g(|-1|) = -1$! La bonne réponse est donc : $\boxed{\text{il n'existe aucune fonction } g \text{ telle que } \mathcal{C}_1 \text{ soit vérifiée.}}$

Commentaire : l'existence d'une fonction g tel que (f, g) vérifie $\mathcal{C}_1$ implique (et est même équivalente !) au fait que f soit *injective*, ce qui signifie que f envoie systématiquement deux réels distincts sur deux réels distincts (autrement dit, deux réels distincts ne peuvent avoir la même image par f).

L2 On suppose que la fonction g est constante. Expliciter sans démonstration les fonctions f telles que $\mathcal{C}_3$ soit vérifiée.

Méthode et solution : Notons a la valeur prise par g. Pour une fonction arbitraire f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la condition $\mathcal{C}_3$ se récrit donc $f(a) = f(x)$ pour tout réel x, car $g(f(x)) = a$. Ainsi, cette condition est vérifiée seulement si f est constante, et réciproquement si f est constante alors il est immédiat que $f(a) = f(x)$ pour tout réel x. Ainsi, $\boxed{\text{les fonctions } f \text{ telles que } \mathcal{C}_3 \text{ soit vérifiée sont les fonctions constantes de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

R2 Démontrer que f est constante si et seulement si la propriété $\mathcal{C}_3$ est vérifiée quelle que soit la fonction g.

Solution : Supposons d'abord que f est constante de valeur notée y. Alors il est immédiat que pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $f(g(f(x))) = y = f(x)$ pour tout réel x, donc $\mathcal{C}_3$ est vérifiée.

Réciproquement, supposons $\mathcal{C}_3$ vérifiée pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est en particulier vrai pour la fonction constante g de valeur 0, donc le raisonnement fourni pour justifier **L2** montre que f est constante.

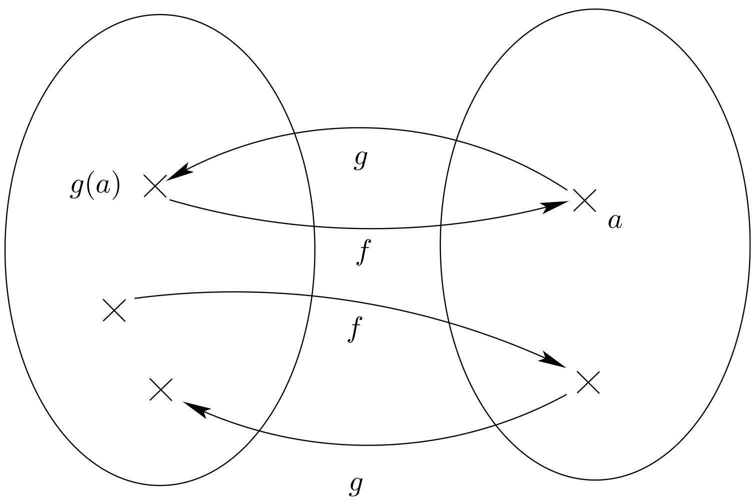
Suite itérée croisée

On fixe un réel a et l'on définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à termes réels en posant $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \begin{cases} g(u_n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(u_n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

M30 On suppose validée la condition $\mathcal{C}_2$. On demande l'information la plus précise que l'on puisse donner sur le nombre de valeurs prises par la suite u.

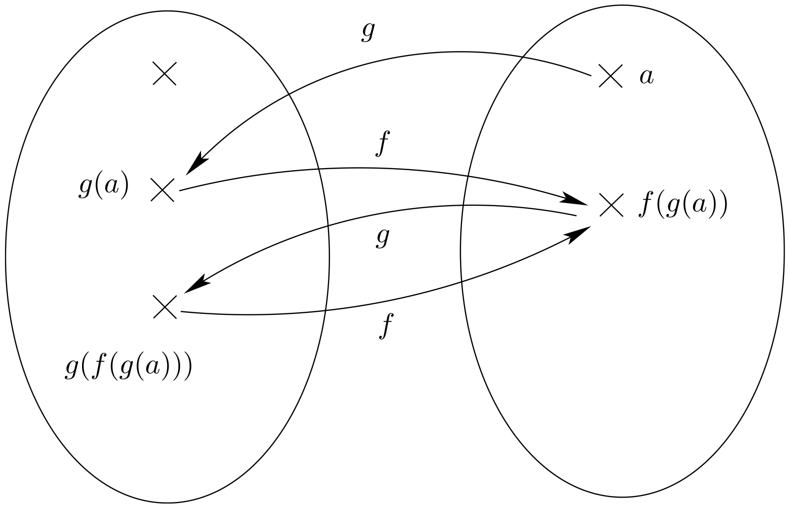
Méthode et solution : Pour cette question et les deux suivantes, il est très utile de représenter la situation par un croquis.



Ici la condition $\mathcal{C}_2$ garantit que $u_2 = f(g(a)) = a$, puis par récurrence $u_{2n} = a$ pour tout $n \geqslant 0$, puis $u_{2n+1} = g(u_{2n}) = g(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On voit ainsi que u prend au plus deux valeurs distinctes (à savoir a et $g(a)$). Pour conclure, il suffit d'observer que a, f et g peuvent être choisis de telle sorte que u prenne exactement deux valeurs, autrement dit telles que $g(a) \neq a$. Il suffit pour cela d'observer que pour $g = f_1$ et $f = g_1$, la condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée (voir **M11**), et pour $a = 0$ on a $g(a) = 1$. Dans ce cas, la suite u prend exactement les valeurs 0 et 1. Ainsi, la réponse la plus précise que l'on pouvait donner est que $\boxed{u \text{ prend au plus } 2 \text{ valeurs distinctes.}}$

M31 On suppose validée la condition $\mathcal{C}_3$. On demande l'information la plus précise que l'on puisse donner sur le nombre de valeurs prises par la suite u.

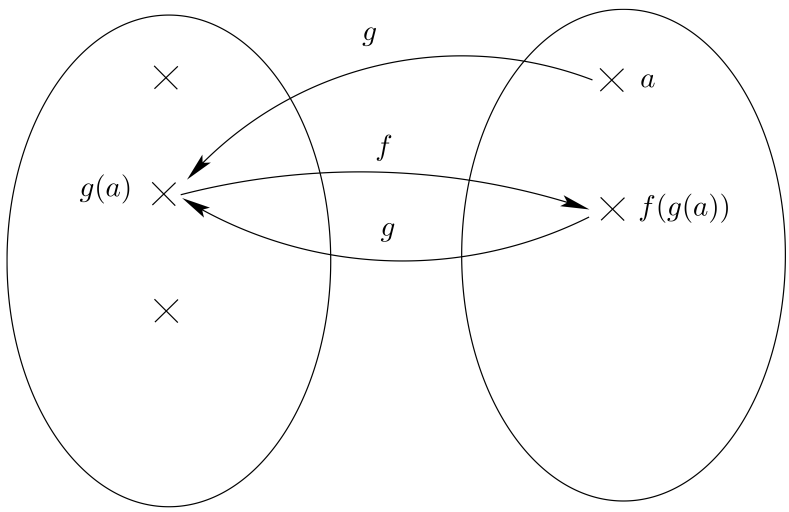
Méthode et solution : La condition $\mathcal{C}_3$ appliquée au réel $g(a)$ garantit que $u_4 = f(g(f(g(a)))) = f(g(a)) = u_2$, puis par récurrence on trouve $u_{2n} = u_2$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et enfin $u_{2n+1} = g(u_2) = g(f(g(a)))$ pour tout entier $n \geqslant 1$.



Ainsi, l'ensemble des valeurs prises par u est $\{a, g(a), f(g(a)), g(f(g(a)))\}$, lequel possède au plus quatre éléments. Visiblement, rien dans $\mathcal{C}_4$ ne semble permettre d'en dire plus. Pour trouver un exemple où u prend exactement quatre valeurs, on peut penser aux exemples déjà traités. Le couple (f_2, g_3) vérifie $\mathcal{C}_3$ (voir **M19**). Dans cet exemple l'ensemble des valeurs prises par u est $\{a, \operatorname{sgn}(a)\sqrt{|a|}, |a|, \sqrt{|a|}\}$. Il suffit alors de prendre $a = -4$ pour trouver quatre valeurs exactement prises par cette suite, à savoir -4, -2, 4 et 2. Ainsi, la réponse la plus précise que l'on pouvait donner est que $\boxed{u \text{ prend au plus 4 valeurs distinctes.}}$

M32 On suppose validée la condition $\mathcal{C}_4$. On demande l'information la plus précise que l'on puisse donner sur le nombre de valeurs prises par la suite u.

Méthode et solution : La condition $\mathcal{C}_4$ garantit que $u_3 = g(f(g(a))) = g(a)$, puis par récurrence $u_{2n+1} = g(a)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Ensuite $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(g(a))$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Ainsi, l'ensemble des valeurs prises par u est $\{a, g(a), f(g(a))\}$, lequel a au plus trois éléments.



Vérifions qu'en choisissant convenablement a, f, g on peut faire que u prenne exactement trois valeurs, autrement dit que $a, g(a), f(g(a))$ soit tous différents. Observons que cela nécessite que $\mathcal{C}_2$ ne soit pas vérifiée. Examinons les exemples déjà étudiés. On a vu que (f_2, g_3) vérifie $\mathcal{C}_3$, donc (g_3, f_2) vérifie $\mathcal{C}_4$. Dans ce cas, pour tout réel a on a $f_2(a) = a^2$ et $g_3(f_2(a)) = |a|$. Il suffit donc de choisir a pour que $a, |a|$ et a^2 soient deux à deux distincts : c'est par exemple le cas pour $a = -2$ (choisi pour être strictement négatif, afin que $a \neq |a|$). Ainsi la réponse la plus précise que l'on pouvait donner est que $\boxed{u \text{ prend au plus 3 valeurs distinctes.}}$