Épreuve de Mathématiques Expertes 2023

Exercice 5. Ensembles bien ordonnés

Note préliminaire : une partie de cet exercice constitue l'exercice 4 de l'épreuve de Mathématiques Générales Avancées 2023 ; la numérotation des questions d'un sujet à l'autre est exactement la même jusqu'à la question **R4**.

Soit A un ensemble formé de nombres réels (autrement dit, une partie de $\mathbb{R}$).

- Un **plus petit élément** de A est un élément a de A tel que $a \leqslant x$ pour tout x dans A.
- Un **plus grand élément** de A est un élément b de A tel que $x \leqslant b$ pour tout x dans A.

On dit que A est **bien ordonné** lorsque toute partie non vide de A admet un plus petit élément. Par exemple :

- $\{0;1\}$ est bien ordonné car ses parties non vides sont $\{0;1\}$, $\{0\}$ et $\{1\}$, et chacune a un plus petit élément (respectivement : 0, 0 et 1) ;
- $\mathbb{N}$ est bien ordonné (cela doit être considéré comme évident) ;
- $[0;1]$ n'est pas bien ordonné car, par exemple, $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ est dénué de plus petit élément bien que non vide.

On rappelle enfin qu'un ensemble est **fini** lorsqu'il n'a qu'une quantité finie d'éléments, et **infini** dans le cas contraire (par exemple, le segment $[0;1]$ est infini).

L5 Parmi les ensembles suivants, indiquer sans démonstration lesquels sont bien ordonnés :

$$\{0;1;\sqrt{2}\}, \quad [0,+\infty[\,, \quad]0;1]\,, \quad \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}.$$

Méthode et solution : L'ensemble $\{0;1;\sqrt{2}\}$ est bien ordonné. En effet, chacune de ses parties non vides a un plus petit élément : c'est 0 si la partie contient 0, c'est 1 si la partie contient 1 mais pas 0, et enfin c'est $\sqrt{2}$ si la partie ne contient que $\sqrt{2}$.

L'ensemble $[0,+\infty[$ n'est pas bien ordonné car $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ en est une partie non vide, et comme indiqué dans l'énoncé elle n'a pas de plus petit élément.

L'ensemble $]0;1]$ n'est pas non plus bien ordonné, pour la même raison que le précédent.

L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est bien ordonné : toute partie non vide A de $\mathbb{N}^*$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément selon le résultat admis dans l'énoncé.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas bien ordonné : en effet c'est une partie non vide de lui-même, et il n'admet pas de plus petit élément (pour tout entier relatif k, l'entier relatif $k-1$ est strictement inférieur à k).

Par suite, comme $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné.

En conclusion, les ensembles bien ordonnés, parmi ceux proposés dans l'énoncé, sont : $\boxed{\{0;1;\sqrt{2}\} \text{ et } \mathbb{N}^*}$.

M48 On s'intéresse à l'existence d'un plus grand élément et à celle d'un plus petit élément pour une partie bien ordonnée et non vide de $\mathbb{R}$.

Méthode et solution : Soit A une partie bien ordonnée de $\mathbb{R}$. Par définition, toute partie non vide de A possède un plus petit élément, et en particulier A elle-même admet un plus petit élément. En revanche, il est possible que A n'admette pas de plus grand élément. Par exemple, l'énoncé indique que $A = \mathbb{N}$ est bien ordonné, mais $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément (pour tout entier naturel n, l'entier naturel $n+1$ lui est strictement supérieur). Ainsi, la réponse attendue était que $\boxed{A \text{ admet nécessairement un plus petit élément, mais pas nécessairement de plus grand élément.}}$

M49 Vrai ou faux ? Toute partie finie de $\mathbb{R}$ est bien ordonnée.

Méthode et solution : Soit A une partie finie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide B de A est donc finie et non vide : clairement elle admet un plus petit élément. Ainsi A est bien ordonnée. L'affirmation indiquée est donc $\boxed{\text{vraie}}$.

Commentaire : le fait que l'ensemble vide ne possède pas de partie non vide ne l'empêche nullement d'être bien ordonné.

M50 Vrai ou faux ? Toute partie bien ordonnée de $\mathbb{R}$ est finie.

Méthode et solution : Piochons dans les exemples déjà étudiés : celui de $\mathbb{N}$ fournit un ensemble bien ordonné qui n'est clairement pas fini. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

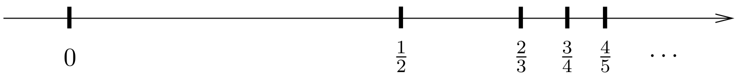
M51 Vrai ou faux ? Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble bien ordonné est bien ordonné.

Méthode et solution : Soit A un ensemble bien ordonné, et B un sous-ensemble non vide de A. Soit C un sous-ensemble non vide de B. Alors C est un sous-ensemble non vide de A ; puisque A est bien ordonné on en déduit que C possède un plus petit élément. Ainsi B est bien ordonné. L'affirmation indiquée est donc $\boxed{\text{vraie.}}$

Commentaire : l'hypothèse voulant que B soit non vide n'a strictement aucun intérêt. C'est une distraction.

M52 Vrai ou faux ? L'ensemble constitué des nombres de la forme $\frac{n-1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

Méthode et solution : Notons A l'ensemble considéré. Il est utile de se représenter A :



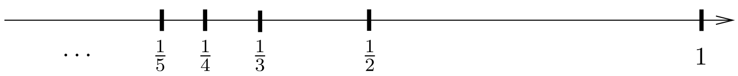
L'ensemble A ressemble fort à celui des entiers naturels. Cela invite à tenter de démontrer qu'il est effectivement bien ordonné. Soit B un sous-ensemble non vide de A. Considérons l'ensemble C formé des entiers naturels non nuls n tels que $\frac{n-1}{n}$ appartienne à B. Vu la définition de A, la non-vacuité de B assure celle de C, donc C possède un plus petit élément n_0. Le réel $a = \frac{n_0-1}{n_0}$ appartient donc à B. Justifions pour finir que a est un plus petit élément de B. Soit b dans B. On écrit donc $b = \frac{n-1}{n}$ pour un entier $n \geqslant 1$, qui appartient donc à C. Ainsi $0 < n_0 \leqslant n$ puis on trouve successivement $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0}$ et

$$a = \frac{n_0 - 1}{n_0} = 1 - \frac{1}{n_0} \leqslant 1 - \frac{1}{n} = \frac{n}{n-1} = b.$$

Ainsi a est bien un plus petit élément de B. En conclusion, A est bien ordonné. L'affirmation indiquée est donc $\boxed{\text{vraie.}}$

M53 Vrai ou faux ? L'ensemble constitué des nombres de la forme $\frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

Méthode et solution : À l'inverse de la question précédente, l'ensemble A considéré ici ressemble à l'ensemble $\mathbb{Z}_-$ des entiers négatifs, lequel n'est pas bien ordonné.



Tout simplement, A est un sous-ensemble non vide de lui-même, et ne possède pas de plus petit élément. Soit en effet $a \in A$, que l'on écrit $a = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\frac{1}{n+1}$ appartient à A et $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, ce qui assure que a n'est pas un plus petit élément de A. Ainsi A n'est pas bien ordonné. L'affirmation indiqué est donc $\boxed{\text{fausse.}}$

M54 et **R4** Vrai ou faux ? L'ensemble constitué des nombres de la forme $\dfrac{n^2+1}{2023\,n + \sin(n) + 1}$, avec $n \in \mathbb{N}$, est bien ordonné.

Méthode et solution : Notons A l'ensemble considéré et montrons qu'il est bien ordonné. Pour n dans $\mathbb{N}$, notons

$$a_n = \frac{n^2+1}{2023\,n + \sin(n) + 1}.$$

Soit B un sous-ensemble non vide de A. Choisissons dans B un élément b_0. Introduisons l'ensemble C des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_n \leqslant b_0$.

Notons que $a_n \geqslant b_0$ dès que n est suffisamment grand. En effet, pour tout $n \geqslant 1$ on voit que $0 < 2023\,n + \sin(n) + 1 \leqslant 2023\,n + 2 \leqslant 2025\,n$, car notamment $\sin(n) + 1 \geqslant 0$, donc

$$a_n \geqslant \frac{n^2+1}{2025\,n} \geqslant \frac{n}{2025},$$

et en particulier si $n > 2025\, b_0$ alors $a_n > b_0$. Ainsi, l'ensemble C des éléments de B inférieurs ou égaux à b_0 est fini, car inclus dans l'ensemble fini $\{a_0, \ldots, a_m\}$ pour $m := 2025\, b_0$. De plus C n'est pas vide car il contient b_0. Ainsi C admet un plus petit élément c, vérifiant bien sûr $c \leqslant b_0$. Concluons :

- l'élément c est dans B ;
- pour tout x dans B, ou bien $x \leqslant b_0$ et alors $x \in C$ donc $c \leqslant x$, ou bien $x > b_0$ et alors immédiatement $c \leqslant x$.

Ainsi c est le plus petit élément de B. En conséquence, A est bien ordonné. L'affirmation indiquée est donc $\boxed{\text{vraie.}}$

Commentaire : on n'attendait pas des candidats qu'ils détaillent le dernier point : il était toléré de prendre pour évident que c était, de manière immédiate, un plus petit élément de B.

M55 Vrai ou faux ? Pour toute partie bien ordonnée A de $\mathbb{R}$ et tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, l'intersection $[a, b] \cap A$ (constituée des éléments communs à A et $[a, b]$) est finie.

Méthode et solution : Il faut penser à examiner les exemples déjà étudiés. L'ensemble A considéré en **M52** est infini (car la suite de terme général $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ est strictement croissante), et il est bien ordonné comme on l'a déjà vu. Comme son intersection avec $[0; 1]$ est lui-même, l'affirmation indiquée est contredite. Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{fausse.}}$

M56 Vrai ou faux ? Quelles que soient les parties bien ordonnées A et B de $\mathbb{R}$, leur réunion $A \cup B$ (constituée des réels appartenant à au moins l'une des parties A et B) est bien ordonnée.

Méthode et solution : Nous allons montrer que l'affirmation indiquée est vraie. Soit donc deux parties bien ordonnées A et B de $\mathbb{R}$. Soit C une partie non vide de $A \cup B$. On distingue trois cas :

- Si C ne contient aucun élément de A alors elle est incluse dans B, donc a un plus petit élément puisque B est bien ordonnée (et C n'est pas vide).
- Symétriquement, si C ne contient aucun élément de B alors elle a un plus petit élément car A est bien ordonnée (et C n'est pas vide).
- Supposons enfin que C contienne à la fois des éléments de A et de B. L'ensemble $C \cap A$ est une partie non vide de A donc il a un plus petit élément, noté c_1. De même $C \cap B$ a un plus petit élément, noté c_2. Notons c le plus petit des éléments c_1 et c_2 : c'est un élément de C. Vérifions que c'est un plus petit élément : soit ainsi x dans C. Si $x \in A$ alors $c \leqslant c_1 \leqslant x$, si $x \in B$ alors $c \leqslant c_2 \leqslant x$. Ainsi c est un plus petit élément de C.

Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{vraie.}}$

M57 Vrai ou faux ? Quelles que soient les parties bien ordonnées A et B de $\mathbb{R}$, l'ensemble $A \Delta B$, formé des réels appartenant à exactement une des parties A et B, est bien ordonné.

Méthode et solution : Nous combinons deux résultats antérieurs pour démontrer que l'affirmation indiquée est vraie. Soit en effet deux parties bien ordonnées A et B de $\mathbb{R}$. Alors

$A \cup B$ est bien ordonnée par la question **M56**. Or $A \Delta B$ est un sous-ensemble de $A \cup B$, donc soit il est non vide et alors la question **M51** montre qu'il est bien ordonné, soit il est vide et alors il est évidemment bien ordonné (car il n'a pas de partie non vide). Ainsi l'affirmation indiquée est $\boxed{\text{vraie.}}$

M58 Vrai ou faux ? Toute partie bien ordonnée A de $\mathbb{R}$ ayant un plus grand élément est finie.

Méthode et solution : La question est délicate car toutes les parties bien ordonnées fournies dans l'énoncé et ayant un plus grand élément sont infinies. Cependant, il existe un contre-exemple à l'affirmation, que l'on peut construire à l'aide des questions antérieures. Considérons l'ensemble B de la question **M52**, et considérons l'ensemble $C = \{2\}$ (constitué du seul élément 2). Il est évident que $A = B \cup C$ admet 2 pour plus grand élément, mais il est infini (car B est infini). Enfin B et C sont tous deux bien ordonnés : pour B on utilise la question **M52**, alors que pour C on remarque qu'il est fini (non vide). Ainsi A est bien ordonné. L'affirmation indiquée est donc $\boxed{\text{fausse.}}$

M59 et **R5** Vrai ou faux ? Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, si A et $-A$ (formé des nombres de la forme $-x$, avec x dans A) sont bien ordonnées alors A est finie.

Méthode et solution : Nous allons démontrer que l'affirmation indiquée est vraie. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que A et $-A$ sont bien ordonnées. On raisonne par l'absurde en suppose que A est infinie. Nous construisons par récurrence une suite strictement croissante $(a_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de A telle que A ne contienne aucun élément de $]a_n, a_{n+1}[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Comme A est infini il n'est pas vide, donc puisque A est bien ordonné il admet un plus petit élément, noté a_0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ dans A tels que $[a_0, a_n] \cap A = \{a_0, \ldots, a_n\}$. En particulier, comme A est infini l'ensemble $]a_n, +\infty[\cap A$ n'est pas vide, donc il admet un plus petit élément a_{n+1}, et il est immédiat que $[a_0, a_{n+1}] \cap A = \{a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ et que $a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1}$.

On a ainsi construit une suite strictement croissante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A. Observons alors que $\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide de $-A$ sans plus petit élément : tout élément de cette partie s'écrit $-a_p$ pour un $p \in \mathbb{N}$, et alors $-a_{p+1}$ est un élément de $-A$ qui lui est strictement inférieur. On a ainsi contredit le fait que $-A$ est bien ordonnée. On a donc démontré que si A et $-A$ sont bien ordonnées alors A est finie. L'affirmation indiquée est donc $\boxed{\text{vraie.}}$

Isordonnies

Étant donné deux parties A et B de $\mathbb{R}$, une **isordonnie** de A dans B est une fonction f d'ensemble de définition A, à valeurs dans B et qui vérifie les deux conditions suivantes :

(C) f est strictement croissante, autrement dit $f(x_1) < f(x_2)$ quels que soient x_1 et x_2 dans A vérifiant $x_1 < x_2$;

(P) Pour toute valeur y atteinte par f, tout élément de B inférieur à y est une valeur atteinte par f.

Par exemple :

- La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à k associe $-k$ vérifie la condition (P) mais pas la condition (C) : ce n'est donc pas une isordonnie.
- La fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à k associe k vérifie la condition (C) mais pas la condition (P) (par exemple 1 est atteint par g, mais pas $\frac{1}{2}$). Ce n'est donc pas une isordonnie.

L6 On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Parmi les cinq assertions suivantes, indiquer lesquelles sont vraies :

(A1) La fonction identité est une isordonnie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
(A2) La fonction identité est une isordonnie de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$.
(A3) La fonction identité est une isordonnie de $2\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
(A4) La fonction qui à n associe $2n$ est un isordonnie de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}$.
(A5) La fonction qui à n associe $n+1$ est un isordonnie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Méthode et solution :

- La fonction identité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est clairement strictement croissante et prend toutes les valeurs dans $\mathbb{N}$, donc c'est une isordonnie.
- La fonction identité de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas une isordonnie car elle ne vérifie pas la condition (P) : elle atteint la valeur 1 mais pas la valeur 0.
- La fonction identité de $2\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas une isordonnie car elle ne vérifie pas la condition (P) : elle atteint la valeur 2 mais pas la valeur 1.
- La fonction qui à n associe $2n$ est bien une isordonnie de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}$: elle est clairement strictement croissante et atteint toute valeur dans $2\mathbb{N}$.
- La question qui à n associe $n+1$ n'est pas une isordonnie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: à nouveau elle atteint la valeur 1 mais pas la valeur 0, donc ne vérifie pas la condition (P).

En conclusion, $\boxed{\text{les affirmations vraies parmi celles indiquées sont (A1) et (A4).}}$

Étude d'un raisonnement

Le raisonnement suivant, qui ne contient pas d'erreur formelle mais est insuffisamment détaillé, prétend démontrer que, pour n'importe quelle partie bien ordonnée A de $\mathbb{R}$, la fonction identité est la seule isordonnie de A dans A.

Soit A une partie bien ordonnée de $\mathbb{R}$, et f une isordonnie de A dans A. On raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas la fonction identité.

(1) L'ensemble des éléments x de A tels que $f(x) \neq x$ est une partie non vide de A, que l'on note A_0.
(2) L'ensemble A_0 possède un plus petit élément y.
(3) On a $f(x) = x$ pour tout élément x de A strictement inférieur à y.
(4) On ne peut donc avoir $f(y) < y$.
(5) On ne peut pas non plus avoir $f(y) > y$.
(6) On a ainsi une contradiction.

Dans les questions suivantes, on demande des précisions quant aux détails manquants dans le raisonnement. Plus précisément, on demande exactement, parmi les hypothèses (P) et (C), lesquelles sont utilisées dans l'étape indiquée, les autres étapes étant tenues pour acquises.

M60 L'utilisation des hypothèses dans l'étape (1).

Méthode et solution : $\boxed{\text{Aucune des hypothèses (P) et (C) n'est utilisée dans l'étape (1).}}$ On utilise seulement l'hypothèse voulant que f n'est pas l'identité.

M61 L'utilisation des hypothèses dans l'étape (2).

Méthode et solution : $\boxed{\text{Aucune des hypothèses (P) et (C) n'est utilisée dans l'étape (2).}}$ On utilise seulement l'hypothèse voulant que A est bien ordonné.

M62 L'utilisation des hypothèses dans l'étape (3).

Méthode et solution : $\boxed{\text{Aucune des hypothèses (P) et (C) n'est utilisée dans l'étape (3).}}$ On utilise seulement la définition de A_0 et de l'élément y.

M63 L'utilisation des hypothèses dans l'étape (4).

Méthode et solution : On utilise ici l'hypothèse (C). En effet, si l'on avait $f(y) < y$, d'une part l'hypothèse (C) donnerait $f(f(y)) < f(y)$, d'autre part l'étape (3) donnerait $f(f(y)) = f(y)$, ce qui est contradictoire. En revanche, on n'a visiblement pas besoin de l'hypothèse (P). Ainsi, $\boxed{\text{l'étape (4) utilise l'hypothèse (C) mais pas l'hypothèse (P).}}$

M64 L'utilisation des hypothèses dans l'étape (5).

Méthode et solution : Cette étape utilise à la fois les hypothèses (P) et (C). Expliquons ce point. Raisonnons par l'absurde en supposant $y < f(y)$. Par l'hypothèse (P) il existe $z \in A$ tel que $f(z) = y$. Par l'hypothèse (C) on a nécessairement $z < y$ (sinon ou bien $y = z$ et alors $f(y) = f(z)$, ou bien $y < z$ et alors $f(y) < f(z)$). Ainsi $f(z) = z$ par l'étape (3), et on contredit l'hypothèse $f(z) = y$. Ainsi $\boxed{\text{l'étape (5) utilise les hypothèses (P) et (C).}}$

M65 L'utilisation des hypothèses dans l'étape (6).

Méthode et solution : L'étape (6) ne repose que sur la synthèse des étapes précédentes. Les deux étapes (4) et (5) donnent que $f(y) = y$, ce qui est interdit par la définition de y. C'est effectivement une contradiction. Ainsi, $\boxed{\text{aucune des hypothèses (P) et (C) n'est utilisée dans l'étape (6).}}$

M66 On demande dans combien d'étapes est utilisée implicitement l'hypothèse voulant que A est bien ordonnée.

Méthode et solution : Compte tenu de toutes les explications précédentes, c'est précisément et uniquement dans l'étape (2) que cette hypothèse est utilisée implicitement. Ainsi, l'hypothèse voulant que A est bien ordonnée est utilisée implicitement $\boxed{\text{exactement une fois.}}$