TeSciA

Épreuve de Mathématiques Générales Avancées 2023

Exercice 1. Pot pourri de calcul algébrique

M1 On demande le signe de $2\sqrt{42} - 13$.

Méthode et solution : La méthode la plus simple est de comparer les carrés des nombres $2\sqrt{42}$ et 13, puisque la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $(2\sqrt{42})^2 = 4 \cdot 42 = 168$ tandis que $13^2 = 169$. Ainsi $2\sqrt{42} < 13$, donc $\boxed{2\sqrt{42} - 13 \text{ est (strictement) négatif.}}$

M2 On demande le signe du nombre $\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{8} - \sqrt{3}$.

Méthode et solution : On peut utiliser une méthode semblable à celle de la question précédente, en regroupant les termes deux par deux. Tous les regroupements donnent peu ou prou la même complexité de calculs. On se contentera donc d'observer que

$$(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 = 6 + 5 + 2\sqrt{6}\sqrt{5} = 11 + 2\sqrt{30}$$

tandis que

$$(\sqrt{8} + \sqrt{3})^2 = 8 + 3 + 2\sqrt{8}\sqrt{3} = 11 + 2\sqrt{24},$$

donc $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 > (\sqrt{8} + \sqrt{3})^2$. Puisque $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{8} + \sqrt{3}$ sont positifs on en tire successivement que $\sqrt{6} + \sqrt{5} > \sqrt{8} + \sqrt{3}$ puis que $\boxed{\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{8} - \sqrt{3} \text{ est (strictement) positif.}}$

Remarque : le résultat est lié à la concavité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Cette concavité permettrait en effet d'obtenir les inégalités $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{8-6} \leqslant \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6-5} \leqslant \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}$ à condition de disposer de l'inégalité dite « des trois cordes ».

M3 On demande de simplifier la fraction $F = \dfrac{\sqrt{6}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Méthode et solution : On commence par simplifier le dénominateur (par réduction au même dénominateur) :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

d'où

$$F = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

On conclut grâce à la technique de la quantité conjuguée, qui invite à multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

$$F = \frac{6\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{6\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 6\,(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

M4 On dispose d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 5 cm, et le périmètre 12 cm. On demande de calculer l'aire de ce triangle.

Méthode et solution : On note x et y les longueurs (en centimètres) des deux côtés différents de l'hypoténuse. On a donc, par le théorème de Pythagore, $x^2+y^2 = 25\text{ cm}^2$, tandis que $x+y = 7$ cm par l'information du périmètre. En élevant la dernière égalité au carré, on en déduit $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 24\text{ cm}^2$. Finalement, l'aire du rectangle vaut $\boxed{\frac{xy}{2} = \frac{24}{4} = 6\text{ cm}^2.}$

M5 On dispose d'un triangle équilatéral dont l'aire vaut $1\,\text{cm}^2$. On demande le périmètre de ce triangle.

Méthode et solution : Notons a la longueur commune aux côtés du triangle considéré. Le périmètre p du triangle est $3a$, et on doit calculer a. L'aire A du triangle vaut, selon la formule la donnant à partir d'un angle et des deux côtés qui le forment :

$$A = \frac{1}{2}\,a\cdot a\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2.$$

Ainsi

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\,\text{cm},$$

et finalement

$$p = 3\,a = 2\,(\sqrt{3})^2\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}} = 2\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\,\sqrt{3}\text{ cm}.$$

M6 Soit a, b et c vérifiant le système d'égalités

$$\begin{cases} 2a+b+c &= 2\\ a+2b+c &= 4\\ a+b+2c &= 6. \end{cases}$$

On demande la valeur de la somme $s = a+b+c$.

Méthode et solution : on pourrait bien sûr chercher à résoudre complètement le système mais ce n'est pas nécessaire. En effet, on observe que le système se récrit

$$\begin{cases} a+s &= 2\\ b+s &= 4\\ c+s &= 6. \end{cases}$$

Ainsi en additionnant les trois égalités on trouve $(a+b+c)+3s = 12$ ou encore $4s = 12$. On conclut que $\boxed{s = 3.}$

M7 Soit a et b deux réels tels que $a \geqslant |b|$. On demande de simplifier le carré de la quantité $M = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$.

Méthode et solution : Notons $u = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$ et $v = \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$. On a donc $M^2 = u^2 + v^2 + 2uv$. Or $u^2 + v^2 = a + \sqrt{a^2 - b^2} + a - \sqrt{a^2 - b^2} = 2a$. Par ailleurs,

$$uv = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 + b^2})(a - \sqrt{a^2 - b^2})} = \sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)} = \sqrt{b^2} = |b|.$$

Ainsi,

$$\boxed{M^2 = 2\,(a + |b|).}$$

On notera enfin que l'hypothèse $a \geqslant |b|$ ne permet pas d'en dire plus, notamment elle ne permet pas de lever l'indétermination sur le signe de b.

L1 Donner sans justification les solutions réelles de l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$.

Méthode et solution : Soit x un réel quelconque. Comme $e^x \neq 0$, par multiplication par e^x la condition $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$ est successivement à équivalente à

$$(e^x)^2 - 2 + e^x = 0$$

puis à

$$(e^x - 1)(e^x + 2) = 0,$$

et finalement à $e^x - 1 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$. La dernière condition est impossible car $e^x > 0$, ainsi x est solution de l'équation initiale si et seulement si $e^x = 1$, ce qui équivaut à $x = 0$ (par stricte croissance de l'exponentielle et car $e^0 = 1$). Ainsi, $\boxed{\text{l'équation considérée a pour seule solution } 0.}$

L2 Donner sans justification les solutions réelles de l'équation

$$\left(\frac{e^{2x} - 1}{2e^x}\right)^3 + \left(\frac{e^{2x} - 1}{2e^x}\right)^2 + \left(\frac{e^{2x} - 1}{2e^x}\right) + 1 = 0.$$

Méthode et solution : D'abord l'équation est bien définie en tout réel x (car $e^x \neq 0$). On raisonne en deux temps, en commençant par résoudre l'équation auxiliaire

$$(\mathrm{Eq}_2) : \qquad y^3 + y^2 + y + 1 = 0.$$

Soit y un réel. Si $y \neq 1$ on sait que

$$y^3 + y^2 + y + 1 = \frac{1 - y^4}{1 - y},$$

quantité nulle si et seulement si $y^4 = 1$, autrement dit si et seulement si $|y| = 1$ (car $y \mapsto y^4$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$), i.e. si et seulement si $y = \pm 1$. Si $y = 1$ on a $y^3 + y^2 + y + 1 = 4$. Ainsi y est solution de (Eq_2) si et seulement si $y = -1$.

Soit ensuite x un réel. Pour que x soit solution de l'équation indiquée, il faut et il suffit que $y = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$ soit solution de (Eq_2), autrement dit que $\frac{e^{2x}-1}{2e^x} = -1$, ce qui se traduit par $e^{2x} + 2e^x - 1 = 0$, ou encore $(e^x)^2 + 2e^x - 1 = 0$. L'équation de second degré $X^2 + 2X - 1 = 0$ a pour discriminant $2^2 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$, donc pour solutions $\frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$ et $\frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$. Ainsi x est solution de l'équation de départ si et seulement si $e^x = \sqrt{2} - 1$ et $e^x = -\sqrt{2} - 1$. En observant que $\sqrt{2} - 1 > 0$ et $-\sqrt{2} - 1 < 0$, on conclut que $\boxed{\text{la seule solution de l'équation initiale est } \ln(\sqrt{2}-1).}$

R1 Soit n un entier naturel non nul. On considère les entiers

$$x = \underbrace{11\cdots1}_{2n \text{ chiffres}} \quad \text{et} \quad y = \underbrace{22\cdots2}_{n \text{ chiffres}}.$$

Démontrer que $\sqrt{x-y}$ est un entier.

Méthode et solution : Grâce à la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1,

$$x = 10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 10 + 1 = \frac{10^{2n}-1}{10-1} = \frac{10^{2n}-1}{9}$$

et

$$y = 2 \cdot (10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) = 2\,\frac{10^n - 1}{9}\cdot$$

Ainsi

$$x - y = \frac{10^{2n} - 2\cdot 10^n + 1}{9} = \frac{(10^n-1)^2}{9} = z^2$$

pour

$$z = \frac{10^n-1}{3} = 3 \cdot \frac{10^n-1}{9} = 3\cdot(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $x - y$ est bien le carré d'un entier naturel, ce qui répond à la question.

R2 Soit a, b, c trois réels positifs. Démontrer que l'un des réels $a\,(1-b)$, $b\,(1-c)$ et $c\,(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}\cdot$ *On pourra commencer par s'intéresser à* $x\,(1-x)$ *pour* x *réel.*

Méthode et solution : La fonction $f : x \mapsto x\,(1-x) = x - x^2$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto 1 - 2x$. Sa dérivée est positive sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$, négative sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, donc f est croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$, ce qui donne l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x\,(1-x) \leqslant \frac{1}{4}\cdot$$

Supposons maintenant que $a \geqslant b$. Alors $1 - b \leqslant 1 - a$, et comme $a \geqslant 0$ il vient $a\,(1-b) \leqslant a\,(1-a) \leqslant \frac{1}{4}$. Symétriquement, si $b \geqslant c$, alors $b\,(1-c) \leqslant \frac{1}{4}$, et si $c \leqslant a$ alors $c\,(1-a) \leqslant \frac{1}{4}\cdot$ Si aucune des conditions proposées n'était vérifiée on aurait $a > b > c > a$ ce qui est absurde. On a donc démontré qu'au moins une des trois conditions est réalisée, donc l'un des trois réels $a\,(1-b)$, $b\,(1-c)$ et $c\,(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}\cdot$