



2023

Mathématiques Expertes
Épreuve 2, Option A

25 mars 2023

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ○ ○ ●

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1, M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse \square . Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1, L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse \triangle . Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1, R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ○ ou la feuille-réponse \triangle , selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TèSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).

Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES

Exercice 1. Nombres complexes

M1 Le produit $(1 - 3i)(4 + i)$ vaut :

- A** $1 - 13i$ **B** $-4 + 10i$ **C** $7 - 11i$ **D** $-7 - 10i$ **E** $7 + 11i$

M2 Le nombre complexe $5 + 12i$ a pour module :

- A** 106 **B** 17 **C** $\sqrt{13}$ **D** $\sqrt{17}$ **E** 13

M3 L'inverse du nombre complexe $3 + 4i$ est :

- A** $\frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$ **B** $\frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$ **C** $\frac{1}{3} + \frac{i}{5}$ **D** $\frac{1}{3} - \frac{i}{5}$ **E** $\frac{1}{3} + \frac{i}{4}$

L1 Mettre le quotient $\frac{7+i}{1+2i}$ sous la forme $a + ib$, avec a et b réels.

M4 L'équation $z^2 - 6z + 11 = 0$ possède pour solutions complexes :

- A** $\frac{3 + 2i\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{3 - 2i\sqrt{2}}{2}$
 B $-3 + 2i\sqrt{2}$ et $-3 + 2i\sqrt{2}$
 C $-3 + i\sqrt{2}$ et $-3 - i\sqrt{2}$
 D aucune de ces réponses
 E $3 + i\sqrt{2}$ et $3 - i\sqrt{2}$

M5 Le nombre de solutions complexes de l'équation $z^5 = 1$ est :

- A** 4 **B** 5 **C** 3 **D** 1 **E** 2

M6 Le nombre de nombres complexes z vérifiant simultanément $z^{15} = 1$ et $z^{25} = 1$ est :

- A** fini et compris strictement entre 1 et 5
 B fini et au moins égal à 5
 C infini
 D 1
 E nul

R1 Donner, en justifiant votre réponse, le nombre exact de nombres complexes z vérifiant simultanément $z^{15} = 1$

et $z^{25} = 1$.

□ **M7** Le module et un argument de $(-1 + i\sqrt{3})^2$ sont respectivement :

- A** $\sqrt{2}$ et $-\frac{\pi}{6}$
 B 4 et $-\frac{2\pi}{3}$
 C 2 et $-\frac{2\pi}{3}$
 D 2 et $\frac{-\pi}{3}$
 E 4 et $\frac{2\pi}{3}$

□ **M8** Soit $a \in]0, \pi[$. Le nombre complexe $z = -i \cos a - \sin a$ est alors égal à :

- A** $e^{i(-a-\pi/2)}$
 B e^{ia}
 C e^{-ia}
 D $e^{i(a+\pi)/2}$
 E $-e^{ia}$

□ **M9** Soit $a \in]-\pi, \pi[$. Le nombre complexe $z = 1 + \cos a - i \sin a$ est alors égal à :

- A** $2 \cos(a/2) e^{ia/2}$
 B $2 \cos(a/2) e^{-ia/2}$
 C $e^{-ia/2}$
 D $-e^{ia/2}$
 E $2 \sin(a/2) e^{ia/2}$

□ **M10** Le nombre complexe $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{2401}$ vaut :

- A** $\sqrt{2}^{2401} e^{i\frac{\pi}{12}}$
 B $\sqrt{2}^{2401} e^{-i\frac{\pi}{12}}$
 C $2^{2401} e^{i\frac{\pi}{12}}$
 D 1
 E $2^{2401} e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Exercice 2. Semi-inverses d'une fonction

Dans tout cet exercice, on se donne deux fonctions f et g , définies en tout réel et à valeurs réelles. On introduit quatre conditions :

- (f, g) vérifie \mathcal{C}_1 lorsque $g(f(x)) = x$ pour tout réel x .
- (f, g) vérifie \mathcal{C}_2 lorsque $f(g(y)) = y$ pour tout réel y .
- (f, g) vérifie \mathcal{C}_3 lorsque $f(g(f(x))) = f(x)$ pour tout réel x .
- (f, g) vérifie \mathcal{C}_4 lorsque $g(f(g(y))) = g(y)$ pour tout réel y .

Par exemple :

- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x , et $g(y) = 2y$ pour tout réel y , les conditions \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont évidemment vérifiées ;
- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x , et $g(y) = y + 1$ pour tout réel y , la condition \mathcal{C}_1 n'est pas vérifiée, car l'égalité $\frac{x}{2} + 1 = x$ ne vaut pas pour $x = 0$ (par exemple).

Pour un réel y , on pose $\text{sgn}(y) = 1$ si $y \geq 0$, et $\text{sgn}(y) = -1$ si $y < 0$.

On dit qu'une fonction est **constante** lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur.

On introduit enfin les cinq fonctions particulières f_1, f_2, g_1, g_2 et g_3 qui suivent :

- f_1 associe à tout réel x le réel $f_1(x) = e^x$;

- f_2 associe à tout réel x le réel $f_2(x) = x^2$;
- g_1 associe à tout réel y le réel $g_1(y) = \ln(y)$ si $y > 0$, et $g_1(y) = 0$ sinon ;
- g_2 associe à tout réel y le réel $g_2(y) = \sqrt{|y|}$;
- g_3 associe à tout réel y le réel $g_3(y) = \text{sgn}(y) \cdot \sqrt{|y|}$. Par exemple, $g_3(-4) = -2$ et $g_3(9) = 3$.

Vrai ou faux ?

Dans les questions **M11** à **M27**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

- M11** La condition \mathcal{C}_1 est vérifiée par le couple (f_1, g_1) .

A Faux B Vrai

- M12** La condition \mathcal{C}_2 est vérifiée par le couple (f_1, g_1) .

A Vrai B Faux

- M13** La condition \mathcal{C}_1 est vérifiée par le couple (f_2, g_2) .

A Faux B Vrai

- M14** La condition \mathcal{C}_2 est vérifiée par le couple (f_2, g_2) .

A Vrai B Faux

- M15** La condition \mathcal{C}_3 est vérifiée par le couple (f_2, g_2) .

A Faux B Vrai

- M16** La condition \mathcal{C}_4 est vérifiée par le couple (f_2, g_2) .

A Faux B Vrai

- M17** La condition \mathcal{C}_1 est vérifiée par le couple (f_2, g_3) .

A Vrai B Faux

- M18** La condition \mathcal{C}_2 est vérifiée par le couple (f_2, g_3) .

A Faux B Vrai

- M19** La condition \mathcal{C}_3 est vérifiée par le couple (f_2, g_3) .

A Vrai B Faux

M20 La condition \mathcal{C}_4 est vérifiée par le couple (f_2, g_3) .

A Vrai Faux

M21 Quel que soit le choix des fonctions f et g , si la condition \mathcal{C}_1 est vérifiée alors la condition \mathcal{C}_2 l'est aussi.

A Vrai Faux

M22 Quel que soit le choix des fonctions f et g , si les conditions \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 sont vérifiées alors la condition \mathcal{C}_1 est vérifiée.

Faux **B** Vrai

M23 Quel que soit le choix des fonctions f et g , si la condition \mathcal{C}_1 est vérifiée alors les conditions \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 sont vérifiées.

Vrai **B** Faux

M24 Si \mathcal{C}_1 est vérifiée alors f prend toutes les valeurs réelles possibles.

Faux **B** Vrai

M25 Si \mathcal{C}_1 est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors \mathcal{C}_2 est vérifiée.

A Faux Vrai

M26 Si \mathcal{C}_3 est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors \mathcal{C}_1 est vérifiée.

A Vrai Faux

M27 Si \mathcal{C}_3 est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors \mathcal{C}_2 est vérifiée.

A Faux Vrai

M28 Pour la fonction f qui à x associe $x + 1$:

A Il existe plusieurs fonctions g telles que \mathcal{C}_1 soit vérifiée

B Il n'existe aucune fonction g telle que \mathcal{C}_1 soit vérifiée

Il existe exactement une fonction g tel que \mathcal{C}_1 soit vérifiée

M29 Pour la fonction f qui à x associe $|x|$:

Il n'existe aucune fonction g telle que \mathcal{C}_1 soit vérifiée

B Il existe plusieurs fonctions g telles que \mathcal{C}_1 soit vérifiée

C Il existe exactement une fonction g tel que \mathcal{C}_1 soit vérifiée

- △ **L2** On suppose que la fonction g est constante. Expliciter sans démonstration les fonctions f telles que \mathcal{C}_3 soit vérifiée.
- **R2** Démontrer que f est constante si et seulement si la propriété \mathcal{C}_3 est vérifiée quelle que soit la fonction g .

Suite itérée croisée

On fixe un réel a et l'on définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ à termes réels en posant $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \begin{cases} g(u_n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(u_n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- **M30** En supposant validée la condition \mathcal{C}_2 , quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a , f et g , celle qui apporte l'information la plus précise ?
- A** La suite u est constante
- B** La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes
- C** La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
- La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes
- E** La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
- **M31** En supposant validée la condition \mathcal{C}_3 , quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a , f et g , celle qui apporte l'information la plus précise ?
- A** La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
- B** La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
- La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes
- D** La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes
- E** La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes
- **M32** En supposant validée la condition \mathcal{C}_4 , quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a , f et g , celle qui apporte l'information la plus précise ?
- A** La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes
- B** La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes
- La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
- D** La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
- E** La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes

Exercice 3. Questions de divisibilité

Dans les questions **M33** à **M36**, on se donne un entier naturel *impair* p différent de 1, et a un entier naturel non nul.

- M33** L'implication « si p divise a alors a est impair » :
- A** est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie
- peut tomber en défaut même si p est premier
- C** est toujours vraie
- M34** L'implication « si p divise $2a$ alors p divise a » :
- est toujours vraie
- B** peut tomber en défaut même si p est premier
- C** est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie
- M35** L'implication « si p divise a^2 alors p divise a » :
- A** peut tomber en défaut même si p est premier
- B** est toujours vraie
- est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie
- M36** L'implication « si p divise $8a^2$ alors p divise a » :
- A** est toujours vraie
- est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie
- C** peut tomber en défaut même si p est premier

Dans la suite de l'exercice, on se donne un nombre premier p impair, ainsi que deux entiers naturels a et b non nuls.

- M37** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de diviseurs positifs de p^n est :
- A** $p^n - 1$ **B** n $n + 1$ **D** $n - 1$ **E** p^{n-1}
- M38** L'affirmation « $p + 1$ a strictement plus de diviseurs que p » :
- A** est systématiquement fausse
- est systématiquement vraie
- C** peut être vraie ou fausse, selon la valeur de p

R3 Justifier votre réponse à la question **M38**.

M39 Si a a exactement trois diviseurs positifs alors on peut affirmer que :

a est le carré d'un nombre premier

B a est le cube d'un nombre premier

C $a = 12$

D a est le produit de deux nombres premiers distincts

E a est premier

L3 On suppose que a possède exactement trois diviseurs positifs et que b en possède exactement deux. Donner sans démonstration les valeurs possibles (lorsque a et b varient) pour le nombre D de diviseurs positifs de ab .

M40 Si le nombre de diviseurs positifs de a est premier et impair alors :

A a est premier

B $a = 1$

C a possède plusieurs diviseurs premiers

a possède un unique diviseur premier, mais a n'est pas premier

Exercice 4. Nombres complexes et géométrie

Pour un nombre réel x , on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier relatif k tel que $k \leq x < k + 1$.

Pour un nombre complexe z , on note $d(z)$ le plus petit des deux réels $\operatorname{Im}(z) - [\operatorname{Im}(z)]$ et $[\operatorname{Im}(z) + 1] - \operatorname{Im}(z)$.

△ **L4** Donner une expression simplifiée de $d(1)$, $d\left(\frac{i}{2}\right)$ et $d\left(1 + \frac{5}{4i}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on se place dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormal, dans lequel sont calculés coordonnées et affixes des points. Il pourra être judicieux, pour interpréter la valeur de $d(z)$, de raisonner à l'aide des droites D_k et D_{k+1} pour k entier, où l'on note D_t la droite d'équation $y = t$.

□ **M41** Quels que soient les réels x et y :

A $d(x + iy) = -d(y)$

B $d(x + iy) = d(x) + d(y)$

$d(x + iy) = d(iy)$

D $d(x + iy) = d(x)$

E $d(x + iy) = d(x) - d(y)$

□ **M42** Pour tout nombre complexe z :

A $d(-z) \neq -d(z)$ sauf si z est entier

B $d(-iz) = -d(z) + 1$ si z est entier

C $d(-z) = -d(z)$

D $d(-z) = d(z)$ si est z rationnel, et seulement dans ce cas

$d(-z) = d(z)$

□ **M43** Pour tout nombre complexe z et tout entier relatif q :

$d(z + iq) = d(z)$

B $d(z + iq) = d(z) + iq$

C $d(z + iq) = d(iq)$

D $d(z + iq) = d(z) - q$

E $d(z + iq) = d(z) - i(q)$

□ **M44** Lorsque z décrit \mathbb{C} , le nombre complexe $d(z)$ décrit :

A $[0, 1[$

B $[0, 1]$

C $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$[0, \frac{1}{2}]$

E $[0, \frac{1}{2}[$

Pour un nombre complexe z , on note

$$t(z) = \operatorname{Re}(z) + id(z).$$

À tout point M du plan, d'affixe z , on associe le point $T(M)$ d'affixe $t(z)$.

On considère enfin les points M_1 et M_2 d'affixes respectives 1 et $1 + i$, ainsi que le milieu M_3 du segment $[M_1, M_2]$.

M45 Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A** $T(M_1) = T(M_3)$
- B** $T(M_3)$ est le milieu du segment $[T(M_1), T(M_2)]$
- C** $T(M_1) = M_3$
- D** $T(M_1) = M_1$ et $T(M_3) = M_3$
- E** $T(M_1) = M_2$

Étant donné deux réels a et b tels que $a \leq b$, on note $I_{a,b}$ l'ensemble des complexes z tels que $a \leq \operatorname{Im}(z) \leq b$.

M46 Soit n un entier naturel non nul. Sur l'ensemble $I_{n, n+\frac{1}{2}}$, la fonction qui à M associe $T(M)$ agit comme :

- A** Une translation selon un vecteur non nul
- B** Une symétrie centrale
- C** Une symétrie orthogonale
- D** La fonction identité
- E** Une projection orthogonale

M47 Soit n un entier naturel non nul. Sur l'ensemble $I_{n+\frac{1}{2}, n+1}$, la fonction qui à M associe $T(M)$ agit comme :

- A** La fonction identité
- B** Une symétrie centrale
- C** Une symétrie orthogonale
- D** Une translation selon un vecteur non nul
- E** Une projection orthogonale

Exercice 5. Ensembles bien ordonnés

Soit A un ensemble formé de nombres réels (autrement dit, une partie de \mathbb{R}).

- Un **plus petit élément** de A est un élément a de A tel que $a \leq x$ pour tout x dans A .
- Un **plus grand élément** de A est un élément b de A tel que $x \leq b$ pour tout x dans A .

On dit que A est **bien ordonné** lorsque toute partie non vide de A admet un plus petit élément. Par exemple :

- $\{0; 1\}$ est bien ordonné car ses parties non vides sont $\{0; 1\}$, $\{0\}$ et $\{1\}$, et chacune a un plus petit élément (respectivement : 0, 0 et 1) ;
- \mathbb{N} est bien ordonné (cela doit être considéré comme évident) ;
- $[0; 1]$ n'est pas bien ordonné car, par exemple, $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ est dénué de plus petit élément bien que non vide.

On rappelle enfin qu'un ensemble est **fini** lorsqu'il n'a qu'une quantité finie d'éléments, et **infini** dans le cas contraire (par exemple, le segment $[0, 1]$ est infini).

△ **L5** Parmi les ensembles suivants, indiquer sans démonstration lesquels sont bien ordonnés :

$$\{0; 1; \sqrt{2}\}, [0, +\infty[,]0; 1], \mathbb{N}^*, \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{R}.$$

□ **M48** Une partie bien ordonnée et non vide de \mathbb{R} :

- A** admet nécessairement un plus grand élément et un plus petit élément
- B** admet nécessairement un plus grand élément, mais pas nécessairement un plus petit élément
- C** peut n'avoir ni plus grand élément, ni plus petit élément
- admet nécessairement un plus petit élément, mais pas nécessairement un plus grand élément

Vrai ou faux (1) ?

Dans les questions **M49** à **M54**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

□ **M49** Toute partie finie de \mathbb{R} est bien ordonnée.

Vrai Faux

□ **M50** Toute partie bien ordonnée de \mathbb{R} est finie.

Faux Vrai

□ **M51** Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble bien ordonné est bien ordonné.

A Faux Vrai

M52 L'ensemble constitué des nombres de la forme $\frac{n-1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

A Faux B Vrai

M53 L'ensemble constitué des nombres de la forme $\frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

A Faux B Vrai

M54 L'ensemble constitué des nombres de la forme $\frac{n^2+1}{2023n+\sin(n)+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$, est bien ordonné.

A Faux B Vrai

R4 Justifier votre réponse à la question **M54**.

Vrai ou faux (2) ?

Dans les questions **M55** à **M59**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

M55 Pour toute partie bien ordonnée A de \mathbb{R} et tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , l'intersection $[a, b] \cap A$ (constituée des éléments communs à A et $[a, b]$) est finie.

A Vrai B Faux

M56 Quelles que soient les parties bien ordonnées A et B de \mathbb{R} , leur réunion $A \cup B$ (constituée des réels appartenant à au moins l'une des parties A et B) est bien ordonnée.

A Faux B Vrai

M57 Quelles que soient les parties bien ordonnées A et B de \mathbb{R} , l'ensemble $A \Delta B$, formé des réels appartenant à un et un seul des ensembles A et B , est bien ordonné.

A Vrai B Faux

M58 Toute partie bien ordonnée A de \mathbb{R} ayant un plus grand élément est finie.

A Vrai B Faux

M59 Pour toute partie A de \mathbb{R} , si A et $-A$ (formé des nombres de la forme $-x$, avec x dans A) sont bien ordonnées alors A est finie.

A Faux B Vrai

△ **R5** Justifier succinctement votre réponse à la question **M59**.

Isordonnies

Étant donné deux parties A et B de \mathbb{R} , une **isordonnie** de A dans B est une fonction f d'ensemble de définition A , à valeurs dans B et qui vérifie les deux conditions suivantes :

- (C) f est strictement croissante, autrement dit $f(x_1) < f(x_2)$ quels que soient x_1 et x_2 dans A vérifiant $x_1 < x_2$.
- (P) Pour toute valeur y atteinte par f , tout élément de B inférieur à y est une valeur atteinte par f .

Par exemple :

- La fonction \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} qui à k associe $-k$ vérifie la condition (P) mais pas la condition (C) : ce n'est donc pas une isordonnie.
- La fonction g de \mathbb{N} dans \mathbb{R} qui à k associe k vérifie la condition (C) mais pas la condition (P) (par exemple 1 est atteint par g , mais pas $\frac{1}{2}$). Ce n'est donc pas une isordonnie.

△ **L6** On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Parmi les cinq assertions suivantes, indiquer sans justification lesquelles sont vraies :

- (A1) La fonction identité est une isordonnie de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .
- (A2) La fonction identité est une isordonnie de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N} .
- (A3) La fonction identité est une isordonnie de $2\mathbb{N}$ dans \mathbb{N} .
- (A4) La fonction qui à n associe $2n$ est une isordonnie de \mathbb{N} dans $2\mathbb{N}$.
- (A5) La fonction qui à n associe $n + 1$ est une isordonnie de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Le raisonnement suivant, qui ne contient pas d'erreur formelle mais est insuffisamment détaillé, prétend démontrer que, pour n'importe quelle partie bien ordonnée A de \mathbb{R} , la fonction identité est la seule isordonnie de A dans A .

Soit A une partie bien ordonnée de \mathbb{R} , et f une isordonnie de A dans A . On raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas la fonction identité.

- (1) L'ensemble des éléments x de A tels que $f(x) \neq x$ est une partie non vide de A , que l'on note A_0 .
- (2) L'ensemble A_0 possède un plus petit élément y .
- (3) On a $f(x) = x$ pour tout élément x de A strictement inférieur à y .
- (4) On ne peut donc avoir $f(y) < y$.
- (5) On ne peut pas non plus avoir $f(y) > y$.
- (6) On a ainsi une contradiction.

Dans les questions suivantes, on demande des précisions quant aux détails manquants dans le raisonnement.

□ **M60** La validité de l'étape (1) :

- A** nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
- B** nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
- ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
- D** nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

□ **M61** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (2) :

- A** nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
- B** nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
- C** nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)
- ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)

- M62** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (3) :
- ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
 - nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
 - nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
 - nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)
- M63** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (4) :
- nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)
 - ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
 - nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
 - nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
- M64** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (5) :
- nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
 - nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
 - ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
 - nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)
- M65** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (6) :
- nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
 - nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)
 - ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
 - nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
- M66** Dans combien d'étapes est utilisée implicitement l'hypothèse voulant que A est bien ordonné ?
- A 4 1 C 2 D 3 E 0

Exercice 6. Nombre de distances entre n points du plan

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $E = \{P_1, \dots, P_n\}$ un ensemble constitué d'exactly n points du plan. On note D l'ensemble des distances entre ces points, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels $d > 0$ pour lesquels il existe deux points *distincts* P_i et P_j tels que $d = P_iP_j$. On note m le nombre d'éléments de D , appelé **nombre de distances** de E .

M67 On suppose dans cette question que $n = 3$. La plus petite valeur possible pour m est alors :

- A 5 B 4 C 2 1 E 3

M68 Sachant que les points de E sont alignés ou sur un même demi-cercle, la plus petite valeur possible pour m est :

- A $2n - 1$ B n C $2n + 1$ $n - 1$ E $2n$

R6 Déterminer la plus grande valeur possible pour m sachant que les points de E sont alignés.

L7 On suppose $4 \leq n \leq 5$. Donner sans démonstration la plus petite valeur possible pour m .

M69 L'affirmation « dès que des points de E sont à même distance de P_1 , ces points sont sur un même demi-cercle de centre P_1 » :

est vraie si P_1P_2 est le plus grand élément de D , mais peut tomber en défaut sinon

B est toujours vraie

C peut être fausse même si P_1P_2 est le plus grand élément de D

On note k le plus grand nombre possible de points de E que l'on puisse placer sur un même cercle de centre P_1 . On note ℓ le nombre de réels distincts parmi $P_1P_2, P_1P_3, \dots, P_1P_n$.

L8 Donner un réel a , en fonction de n et k et le plus grand possible, tel que $\ell \geq a$.

On suppose, en vue de la dernière question, que P_1P_2 est le plus grand élément de D .

M70 En combinant les minoration de m déduites des questions **M68** et **L8**, et en examinant les valeurs possibles pour k , l'inégalité la plus fine que l'on puisse obtenir est :

- A $m \geq \frac{n}{2}$ $m \geq \sqrt{n}$ C $m \geq \sqrt{n} - 1$ D $m \geq \frac{n}{4}$ E $m \geq \frac{1}{2} \sqrt{n}$