Nom et Prénom :

Code Sujet :

A B C D E F G H K L M N P R S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option A

R1 Montrons que le système (E) : $(z^{15}=1)$ et $(z^{25}=1)$ a cinq solutions.

Posons (F) : $z^5=1$ et montrons que (E) et (F) ont les mêmes solutions.

- Soit z solution de (F). Alors $z^{15}=(z^5)^3=1^3=1$ et $z^{25}=(z^5)^5=1^5=1$.
  Donc z est solution de (E)
- Soit z solution de (E). Alors $z^5=z^{2\times 15-25}=(z^{15})^2/z^{25}=1/1=1$.
  Donc z est solution de (F)

Conclusion : (E) a autant de solutions que (F), soit 5 d'après le cours.

R2 On suppose f constante, de valeur notée M. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f(g(f(x)))=M$ et $f(x)=M$, donc (f,g) vérifie $(\mathcal{C}_3)$.

Réciproquement, on suppose que (f,g) vérifie $(\mathcal{C}_3)$ pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Choisissons pour g la fonction constante de valeur 0.
Alors, pour tout réel x, $f(x)=f(g(f(x)))=f(0)$. Ainsi f est constante

R3
- p est premier impair donc a exactement 4 diviseurs $(p,-p,1,-1)$
- $p+1$ est pair, et $p+1>2$ (car p est premier), donc
  $p+1$ a au moins 6 diviseurs (dont $p+1$, $-(p+1)$, $2,-2,1,-1$)

Conclusion : $p+1$ a strictement plus de diviseurs que p.

R4 Notons $x_n=\dfrac{n^2+1}{2023n+\sin(n)+1}$. On observe que $x_n \geq \dfrac{n^2}{2023(n-1)}=\dfrac{n}{2023(1-\frac{1}{n})}$

(si $n>1$). Le minorant tend vers $+\infty$ avec n, donc $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

Soit A une partie non vide de $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. Choisissons y dans A.
Vu ce qui précède il existe un entier $q>0$ tel que $x_n>y$ pour tout entier $n\geq q$.
Ainsi $B=A\cap\,]-\infty;y]$ est fini (car constitué d'éléments parmi $x_0,\dots,x_{q-1}$) et non vide (il contient y)

On prend le plus petit élément m de B, et il est alors clair que $\boxed{m \text{ est le plus petit élément de } A}$