



2023

Mathématiques Générales

Épreuve 1

25 mars 2023

14h-15h30 heure de Paris

Code sujet : ○ ○ ●

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse \square . Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse \triangle . Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ○ ou la feuille-réponse \triangle , selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TèSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).

Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES

Exercice 1. Calcul algébrique et analyse

□ **M1** Pour tout choix du nombre réel x différent de -1 , la quantité $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}$ est égale à :

A $\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x+1)}$

B $\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x+1)}$

C aucune des autres réponses

D $\frac{x}{x+1}$

$\frac{x^3-1}{(x^2+1)(x+1)}$

□ **M2** Pour tout choix du nombre réel x différent de 0 et de -1 , la quantité $\frac{x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ est égale à :

A aucune des autres réponses

$\frac{x^3}{x+1}$

C $\frac{x+1}{x^2}$

D x

E $\frac{x}{x+1}$

□ **M3** Pour tout choix du nombre réel x différent de 0, 1 et -1 , la quantité $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}$ est égale à :

$\frac{2}{x(x^2-1)}$

B $\frac{-2}{x(x^2-1)}$

C $\frac{2x+2}{x(x+1)(x-1)}$

D $\frac{2x-2}{x(x+1)(x-1)}$

E $\frac{2}{x(x^2)-1}$

□ **M4** L'équation $\frac{1}{x^2} = 5x$ d'inconnue réelle x :

A a exactement deux solutions

B n'a pas de solution

a exactement une solution

D a une infinité de solutions

E a au moins trois solutions, et un nombre fini de solutions

□ **M5** L'équation $\frac{1}{x+1} = \frac{3}{x-1}$ a pour ensemble de solutions :

A l'ensemble vide

$\{-2\}$

C $\{-1; 1\}$

D $\{3\}$

E $\{0\}$

M6 L'équation $2x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$ a pour solutions :

A $\frac{3}{4}$

$\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$

C 1 et 2

D $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$

E aucune des autres réponses proposées

M7 L'inéquation $x^3 > 8$ a pour ensemble de solutions :

A aucune des autres réponses proposées

B $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

C $]-\infty, -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}, +\infty[$

D $]2\sqrt{2}, +\infty[$

$]2, +\infty[$

M8 L'inéquation $x^2 - x - 1 < 0$ a pour ensemble de solutions :

A $]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

aucune des autres réponses proposées

C $]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

D $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

E $\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

M9 La somme des solutions distinctes de l'équation $\sqrt{x^3 + x} = \sqrt{2}x$ vaut :

A 3

B 2

C 0

D -1

1

L1 Donner sans justification l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x+1} > -1$.

M10 Soit x et y deux nombres réels. Sachant que $x - y > y$ et $x + y < y$, on peut affirmer que :

$x < 0$ et $y < 0$

B $x < 0$ et $y > 0$

C $y < x$

D $x < y$

E $x < y < 0$

M11 Vrai ou faux ? L'inéquation $e^x \geq x^{2023} + 5$ a une infinité de solutions réelles.

Vrai Faux

M12 Pour tout choix des nombres réels $x, y,$ et $z,$ le nombre $x^3 + y^3 + z^3$ est égal à :

A $-3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

B $-xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

C $xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

E aucune des autres réponses proposées

M13 Soit a et b deux nombres réels tels que l'égalité $\frac{35x - 29}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}$ soit vraie pour tout réel x différent de 1 et 2. Alors, $a + 2b$ vaut :

A 56 **B** -14 **C** -23 **D** 88 76

L2 Donner sans justification les triplets (x, y, z) d'entiers naturels non nuls vérifiant simultanément les relations

$$z^x = y^{2x}, \quad 2^z = 2^x \quad \text{et} \quad x + y + z = 10.$$

M14 Le nombre de solutions de l'équation $e^x = x + 1$ est :

A 0 **B** 4 **C** 3 **D** 2 1

R1 Justifier votre réponse à la question **M14**.

Exercice 2. Géométrie dans l'espace

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormal. On considère les quatre points

$$A(1; 1; \sqrt{6}), \quad B(1; -1; \sqrt{6} - 2), \quad C(1 + \sqrt{6}; 0; 1 + \sqrt{6}) \quad \text{et} \quad D(1 + \sqrt{6}; -2; -1 + \sqrt{6}).$$

L3 Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et \overrightarrow{AD} .

R2 Justifier très brièvement que A, B, C, D sont coplanaires.

△ **L4** Expliciter un vecteur unitaire \vec{n} orthogonal à la fois à \vec{AB} et \vec{AC} .

Vrai ou Faux ?

□ **M15** Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

A Faux **Vrai**

□ **M16** Le quadrilatère $ABDC$ est un losange.

A Faux **Vrai**

□ **M17** Le quadrilatère $ABDC$ est un carré.

Vrai **B** Faux

Un cube

On se donne un cube \mathcal{C} de l'espace dont les faces ont la même aire que $ABDC$.

□ **M18** Le volume du cube \mathcal{C} est égal à :

$16\sqrt{2}$ **B** $4\sqrt{6}$ **C** $6\sqrt{6}$ **D** 8^3 **E** $2\sqrt{6}$

□ **M19** On considère la sphère dont le centre est le centre du cube \mathcal{C} et qui passe par ses huit sommets. Le rayon de cette sphère est :

A 4 **B** $2\sqrt{6}$ $\sqrt{6}$ **D** $\sqrt{8}$ **E** 1

Exercice 3. Calculs de limites

□ **M20** La limite de $3x^6 - 10x^2 + 4$ quand x tend vers $-\infty$:

A est $-\infty$ **B** n'existe pas est $+\infty$ **D** est $3x^6$ **E** est 4

□ **M21** La limite de $\left(\frac{1}{x} + x\right) \ln(x)$ quand x tend vers 2 :

est finie et non nulle **B** est $+\infty$ **C** n'existe pas **D** est 0 **E** est $-\infty$

- **M22** La limite de $\frac{e^x}{e^{-x} - 1}$ quand x tend vers $+\infty$:
- est $-\infty$ n'existe pas est $+\infty$ est finie et non nulle est 0
- **M23** La limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ quand x tend vers 0^+ :
- est $+\infty$ est $-\infty$ n'existe pas est finie et non nulle est 0
- **M24** La limite de $e^x - e^{2x}$ quand x tend vers $+\infty$:
- n'existe pas est 0 est $-\infty$ est finie et non nulle est $+\infty$
- **M25** La limite de $\ln(3x+1) - \ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$:
- est $-\infty$ n'existe pas est $+\infty$ est finie et non nulle est 0
- **M26** La limite de $\frac{\ln(x) - x}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$:
- est $+\infty$ est 0 est $-\infty$ n'existe pas est finie et non nulle
- **M27** La limite de $\frac{x^2 - 3x^3}{x^4 e^x - 1}$ quand x tend vers $-\infty$:
- est $+\infty$ est finie et non nulle est 0 $-\infty$ n'existe pas
- **M28** La limite de $\frac{x e^{2x} - e^x \ln(x)}{1 + x^2 e^x}$ quand x tend vers $+\infty$:
- est $+\infty$ est $-\infty$ est 0 n'existe pas est finie et non nulle
- **M29** La limite de $\frac{x e^x}{\sqrt{1+x^2} - 1}$ quand x tend vers 0^+ :
- est $+\infty$ est finie et non nulle est $-\infty$ n'existe pas est 0
- △ **L5** Donner sans justification la limite ℓ de $\frac{x e^x}{\sqrt{1+x} - 1}$ quand x tend vers 0^+ .
-

Exercice 4. Calculs de dérivées

M30 La dérivée de la fonction qui à x associe $-\frac{1}{x} + \ln(x)$ est la fonction qui à x associe :

A $\frac{x+2}{x^2}$ **B** $\ln(x) + \frac{1}{x}$ **C** $\frac{2}{x}$ $\frac{x+1}{x^2}$ **E** $\frac{-1+x}{x^2}$

M31 La dérivée de la fonction qui à x associe $(x^2 + 1) \ln(x)$ est la fonction qui à x associe :

A 2

B $2x \ln(x) - 1$

C 1

D $2x \ln(x) + x + 1$

aucune des autres propositions indiquées

M32 La dérivée de la fonction qui à x associe $\frac{2+x}{2-x}$ est la fonction qui à x associe :

A $\frac{-2x}{(2-x)^2}$

B aucune des autres propositions indiquées

C $\frac{3-4x}{(2-x)^2}$

D $\frac{-2}{(2-x)^2}$

$\frac{4}{(2-x)^2}$

M33 Sur $]2, +\infty[$, la fonction qui à x associe $\frac{2+x}{2-x}$ est :

A décroissante

croissante

C ni croissante ni décroissante

M34 Sur $]-\infty, 2[$, la fonction qui à x associe $\frac{2+x}{2-x}$ est :

A ni croissante ni décroissante

croissante

C décroissante

M35 Sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$, la fonction qui à x associe $\frac{2+x}{2-x}$ est :

A décroissante

B croissante

ni croissante ni décroissante

M36 La dérivée de la fonction qui à x associe $\ln(1+x^2)$ est la fonction qui à x associe :

A $\ln(2x)$

$\frac{2x}{1+x^2}$

C $\frac{1}{2x}$

D $\frac{1}{1+x^2}$

E aucune des autres propositions indiquées

M37 La dérivée de la fonction qui à x associe $\exp(e^x)$ est la fonction qui à x associe :

$\exp(x + e^x)$

B $\exp(x + e^x - 1)$

C $\exp(e^x)$

D e^{2x}

E aucune des autres propositions indiquées

M38 La dérivée de la fonction qui à x (réel strictement positif) associe $\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$ est la fonction qui à x associe :

A $\frac{1}{x} e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

C $\frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

D $\frac{1+x}{x} e^{\sqrt{x}}$

E $\frac{1}{x} e^{\sqrt{x}}$

L6 Donner une expression, la plus simplifiée possible, de la dérivée de la fonction qui à x associe $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)$.

Exercice 5. Probabilités

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On lance un dé équilibré à n faces numérotées de 1 à n . On lance ensuite une pièce équilibrée autant de fois que le résultat obtenu lors du lancer de dé (par exemple, si le dé est tombé sur 3, on lancera 3 fois la pièce), puis on compte le nombre de fois que la pièce est tombée sur Pile. On note X la variable aléatoire donnant le résultat du dé, et Y la variable aléatoire donnant le nombre de "Pile" obtenus.

Dans les questions **M39** à **M44**, on suppose $n = 2$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.

M39 La variable aléatoire Y prend les valeurs :

$0, 1, 2$

B $0, 1$

C $0, 2$

D $1, 2$

E aucune des autres réponses

□ **M40** Sachant que le dé est tombé sur 2, la probabilité d'obtenir deux "Pile" lors des deux lancers vaut :

- A $\frac{1}{2}$
 B $\frac{3}{4}$
 C $\frac{1}{3}$
 D $\frac{1}{4}$
 E $\frac{1}{6}$

□ **M41** $P(Y = 2)$ vaut :

- A $\frac{1}{6}$
 B $\frac{1}{8}$
 C $\frac{1}{2}$
 D $\frac{1}{4}$
 E $\frac{1}{3}$

□ **M42** $P(Y = 0)$ vaut :

- A $\frac{1}{8}$
 B $\frac{1}{4}$
 C $\frac{2}{5}$
 D $\frac{3}{8}$
 E $\frac{5}{12}$

□ **M43** $P(Y = 1)$ vaut :

- A $\frac{1}{2}$
 B $\frac{5}{12}$
 C $\frac{5}{6}$
 D $\frac{3}{4}$
 E $\frac{2}{5}$

□ **M44** L'espérance de Y est égale à :

- A $\frac{5}{8}$
 B $\frac{3}{4}$
 C $\frac{4}{5}$
 D 2
 E 1

On revient au cas général, où n est quelconque et supérieur ou égal à 2.

□ **M45** $P(Y = 0)$ vaut :

- A $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$
 B $1 - \frac{1}{2^n}$
 C aucune des autres valeurs proposées
 D $\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$
 E $\frac{1}{2^n}$

□ **M46** Pour tout entier k compris entre 1 et n , la probabilité $P(Y = k)$ vaut :

- A $\frac{1}{2^n} \left[\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} \right]$
 B $\frac{1}{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$
 C $\frac{1}{n 2^n} \left[\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} \right]$
 D $\binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$
 E $\frac{1}{n} \left[\frac{1}{2^k} \binom{k}{k} + \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k+1}{k} + \dots + \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \right]$

Exercice 6. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + (u_n)^2} - \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n . On définit aussi une suite v par la relation $v_n = (u_n)^2 + u_n$ pour tout entier naturel n .

M47 Vrai ou faux? On a $u_n \geq -\frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n .

A Faux B Vrai

M48 Laquelle des assertions suivantes est vraie?

A La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ n'est ni arithmétique ni géométrique

B La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

C La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

D La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de raison $\frac{3}{4}$

E La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de raison $-\frac{3}{4}$

M49 Pour tout entier naturel n :

A $v_n = \frac{3n}{4} + 2$ B $v_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ C $v_n = \frac{3n}{4} + 1$ D $v_n = \frac{3n}{4}$ E $v_n = \frac{1}{2^n}$

M50 Pour tout entier naturel n :

A $u_n = \frac{-1 - \sqrt{9 + 3n}}{2}$

B $u_n = \frac{-1 - \sqrt{1 + 3n}}{2^n}$

C $u_n = \frac{-1 + \sqrt{9 + 3n}}{2}$

D $u_n = \frac{-1 + \sqrt{\frac{3n}{4} + 2}}{2}$

E $u_n = \frac{-1 + \sqrt{\frac{3n}{4}}}{2^n}$

M51 La suite $(u_n)_{n \geq 0}$:

A n'est ni croissante ni décroissante B est croissante C est décroissante

□ **M52** La limite de u :

- A** vaut 1
 vaut $+\infty$
 C vaut $\frac{1}{2}$
 D vaut $-\infty$
 E vaut 0

Dans la suite de l'énoncé, on se donne une suite réelle $(a_n)_{n \geq 0}$ quelconque ainsi qu'un réel α quelconque. Si possible, on définit une suite $(b_n)_{n \geq 0}$ par la condition initiale $b_0 = \alpha$ et la relation de récurrence

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n + b_n + (b_n)^2} - \frac{1}{2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

□ **M53** Parmi les conditions suivantes sur $(a_n)_{n \geq 0}$, une ou plusieurs garantissent que $(b_n)_{n \geq 0}$ est définie quel que soit le choix de α . Précisez, parmi elles, celle qui est la moins contraignante sur $(a_n)_{n \geq 0}$.

- A** $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 B $a_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 C $a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 $a_n \geq \frac{1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 E $a_n \geq \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

□ **M54** Parmi les conditions suivantes sur $(a_n)_{n \geq 0}$, une ou plusieurs garantissent que $(b_n)_{n \geq 0}$ est définie et positive quel que soit le choix d'un α positif. Précisez, parmi elles, celle qui est la moins contraignante sur $(a_n)_{n \geq 0}$.

- $a_n \geq \frac{1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 B $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 C $a_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 D $a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 E $a_n \geq \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

□ **M55** Parmi les conditions suivantes sur $(a_n)_{n \geq 0}$, une ou plusieurs garantissent que $(b_n)_{n \geq 0}$ est définie et positive à partir du rang 1 quel que soit le choix de α . Précisez, parmi elles, celle qui est la moins contraignante sur $(a_n)_{n \geq 0}$.

- A** $a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 B $a_n \geq \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 C $a_n \geq \frac{1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 D $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 $a_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On suppose désormais que $(b_n)_{n \geq 0}$ est bien définie. On suppose en outre que $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers 1. On pose

$$c_n = b_n + (b_n)^2 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- M56** Vrai ou faux? On peut affirmer que $c_{n+1} \geq c_n + \frac{3}{4}$ pour tout entier naturel n .
 Faux Vrai
- M57** Vrai ou faux? On peut affirmer que $c_{n+1} \geq c_n + \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n .
 Faux Vrai
- M58** Vrai ou faux? On peut affirmer qu'il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $c_{n+1} \geq c_n + \frac{3}{4}$ pour tout entier $n \geq n_0$.
 Vrai Faux
- M59** Vrai ou faux? On peut affirmer qu'il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $c_{n+1} \geq c_n + \frac{1}{2}$ pour tout entier $n \geq n_0$.
 Vrai Faux
- R3** À l'aide des résultats (corrects) établis à ce stade, déterminer la limite de la suite $(b_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 7. Dérivées successives

Soit f une fonction de variable réelle, définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Pour un nombre entier naturel non nul n , on définit, lorsque c'est possible, la dérivée n -ième de f comme la fonction $f^{(n)}$ obtenue au bout du procédé de construction par récurrence finie qui suit :

$$f^{(1)} = f' \quad \text{et} \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})' \quad \text{pour tout } k \text{ compris entre 2 et } n.$$

Par exemple, lorsque $f^{(2)}$ est définie elle est égale à la dérivée seconde f'' de f . La dérivée troisième de f est définie si et seulement si f'' est définie et dérivable, auquel cas $f^{(3)} = (f'')'$. Et caetera.

- M60** La dérivée troisième de la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ par $f(x) = 3 \ln(1 - x)$ est la fonction qui à x associe :

$\frac{-6}{(1-x)^3}$ $\frac{6}{(1-x)^2}$ $\frac{6}{(1-x)^3}$ $\frac{3}{(1-x)^3}$ $\frac{2}{(1-x)^3}$

M61 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La dérivée seconde de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^n$ est la fonction qui à x associe :

A n^2x^{n-2} **B** $n(n+1)x^{n-2}$ $n(n-1)x^{n-2}$ **D** n^2x^{n-1} **E** $(n^2-1)x^{n-2}$

M62 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. La dérivée n -ième de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^n$ est la fonction qui à x associe :

A $(n+1)!$ **B** $n(n-2)!$ **C** $(n-1)!x$ **D** 0 $n!$

M63 Soit n un entier naturel. La dérivée $(n+1)$ -ième de la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ par $f(x) = -\ln(1-x)$ est la fonction qui à x associe :

A $\frac{n!}{(1-x)^n}$ **B** $\frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}}$ $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ **D** $\frac{(-1)^n (n+1)!}{(1-x)^{n+1}}$ **E** $\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+1}}$

Fonctions polynomiales

On dit qu'une fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est **polynomiale de degré n** lorsqu'il existe des réels fixes a_0, \dots, a_n , avec $a_n \neq 0$, tels que g associe à tout réel x le réel $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + \dots + a_nx^n$. On convient également que la fonction identiquement nulle est polynomiale (mais sans degré). Par exemple, la fonction qui à x associe 2 est polynomiale de degré 0 ; la fonction qui à x associe $4x^3 - x$ est polynomiale de degré 3.

M64 Si g est polynomiale de degré n alors :

- $g^{(k)}$ est polynomiale de degré $n - k$ pour tout entier k compris entre 0 et n
 B $g^{(k)}$ est polynomiale de degré $n + 1 - k$ pour tout entier k compris entre 1 et $n + 1$
 C $g^{(k)}$ est polynomiale de degré $n - k$ pour tout entier k compris entre 0 et $n + 1$
 D aucune des autres propositions indiquées n'est systématiquement vraie
 E $g^{(k)}$ est polynomiale de degré $n + 1 - k$ pour tout entier k compris entre 1 et n

M65 La fonction exponentielle est-elle polynomiale ?

- Non **B** Oui

R4 Justifier la réponse à la question **M65** en s'appuyant sur le résultat de la question **M64**.

Comptage de zéros

On admet que les trois résultats suivants valent pour toute fonction dérivable f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

- étant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) = f(b) = 0$, la fonction f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a, b[$;

- étant donné un réel a tel que $f(a) = \lim_{+\infty} f = 0$, la fonction f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a, +\infty[$;
- étant donné un réel a tel que $f(a) = \lim_{-\infty} f = 0$, la fonction f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $] -\infty, a[$.

□ **M66** Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et p un entier naturel non nul. On suppose que f s'annule en au moins p nombres réels. Parmi les conclusions suivantes, laquelle est la plus forte que l'on puisse obtenir en général grâce aux résultats admis ?

- A** aucune des autres conclusions proposées n'est vraie
- B** f' s'annule en au moins p nombres réels
- C** f' s'annule en au moins $p + 1$ nombres réels
- D** f' s'annule en au moins $p - 1$ nombres réels

□ **M67** Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et p un entier naturel non nul. On suppose, pour un certain entier $n > 0$, que f admet une dérivée n -ième. On suppose enfin que f s'annule en au moins p nombres réels. Parmi les conclusions suivantes, laquelle est la plus forte que l'on puisse obtenir en général ?

- A** $f^{(n)}$ s'annule en au moins $p + n$ nombres réels
- B** $f^{(n)}$ s'annule en au moins p nombres réels
- C** $f^{(n)}$ s'annule en au moins $p - n$ nombres réels
- D** aucune des autres conclusions proposées n'est vraie

△ **R5** Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , supposée polynomiale de degré $n > 0$. En combinant plusieurs résultats antérieurs, démontrer brièvement que f s'annule en au plus n réels.

Une suite particulière de polynômes

Dans cette dernière partie, on considère la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = e^{-x^2}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f^{(n)}$ est définie et qu'il existe une fonction polynomiale H_n telle que

$$f^{(n)}(x) = H_n(x) e^{-x^2} \quad \text{pour tout réel } x.$$

△ **L7** Donner une expression de $H_{n+1}(x)$ en fonction de H_n .

□ **M68** Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction H_n est polynomiale de degré :

- A** $2n - 1$ **B** 2^{n-1} **C** n **D** 0 **E** aucune des autres réponses proposées

On admet que $f^{(n)}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, pour tout $n \geq 1$.

- M69** En appliquant par récurrence les principes admis avant la question **M66**, la conclusion la plus forte que l'on puisse en tirer est que, pour tout $n \geq 1$:
- A** $f^{(n)}$ s'annule au moins $2n$ fois
- $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois
- C** aucune des autres propositions n'est vraie
- D** $f^{(n)}$ s'annule au moins $n - 1$ fois
- E** $f^{(n)}$ s'annule au moins 2^{n-1} fois
- M70** Au vu de tout ce qui précède, on peut conclure que :
- A** $f^{(n)}$ s'annule exactement 2^{n-1} fois
- B** $f^{(n)}$ s'annule exactement $2n - 1$ fois
- $f^{(n)}$ s'annule exactement n fois
- D** aucune des autres propositions n'est vraie
- E** $f^{(n)}$ s'annule exactement $n - 1$ fois

Exercice 8. Géométrie plane

Dans tout l'exercice, dont les parties sont indépendantes les unes des autres, on se place dans un plan euclidien.

Triangles

- M71** Soit a, b, c trois nombres réels strictement positifs. Pour qu'il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés sont a, b et c , il est nécessaire et suffisant que :
- A** $c < b + a$ et $b < a + c$
- $c < a + b$ si on suppose d'emblée que $c \geq a$ et $c \geq b$
- C** aucune des autres réponses proposées
- D** $a < b + c$ et $b < a + c$
- E** $a < b < c$
- M72** Combien existe-t-il d'entiers $n > 0$ tels qu'il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés soient $\ln(12), \ln(75)$ et $\ln(n)$?
- A** 93 **B** 900 **C** 94 **D** Une infinité **E** 893

CORRECTION

□ **M73** Combien existe-t-il d'entiers $n > 0$ tels qu'il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés soient $\ln(12)$, $\ln(54)$ et $\ln(n)$?

A Une infinité

B 645

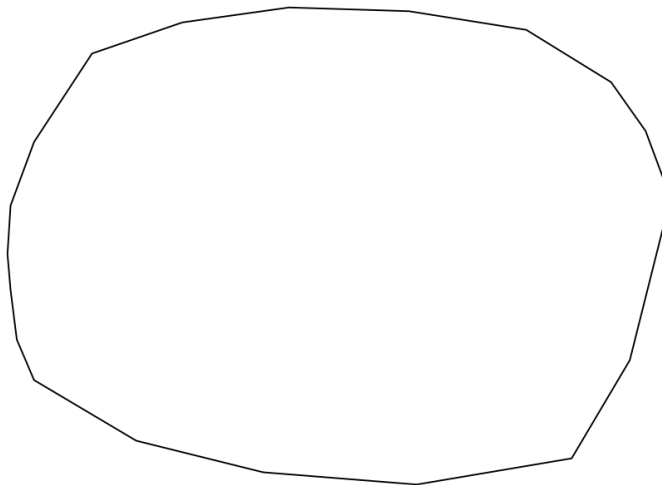
C 644

D 646

E 643

Polygones

On se donne ici un polygone \mathcal{P} à 18 sommets. On le suppose convexe, c'est-à-dire que la mesure de n'importe lequel de ses angles intérieurs est inférieure à 180 degrés.



M74 La moyenne des mesures des angles intérieurs au polygone \mathcal{P} vaut :

- A** 180 degrés **B** 170 degrés **C** 165 degrés **D** 160 degrés **E** 170 degrés

M75 On suppose que les mesures des angles intérieurs à \mathcal{P} forment une suite arithmétique. Quelle valeur ne peut *pas* prendre la plus petite de ces mesures ?

- A** 130 degrés **B** 145 degrés **C** 150 degrés **D** 155 degrés **E** 159 degrés

M76 On suppose que les mesures (calculées en degrés) des angles intérieurs à \mathcal{P} forment une suite arithmétique à termes entiers. Quelle valeur prend nécessairement la plus petite de ces mesures ?

- A** 146 degrés **B** 147 degrés **C** 143 degrés **D** 145 degrés **E** 144 degrés

Figures

L8 On considère un carré $ABCD$. Soit E un point de $[A, D]$ et F un point de $[B, C]$ tels que

$$BE = EF = FD = 30.$$

Que vaut l'aire du carré $ABCD$?

L9 On considère un carré $ABCD$ de côté 5. Soit E et F deux points extérieurs au carré tels que $BE = DF = 3$ et $AE = CF = 4$. Que vaut EF ?