Nom et Prénom :	**Code Sujet :** ○ ○ ○

A B C D E F G H K L M N P R S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

○ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option B ○

R1

On note que $x = 10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 10 + 1 = \frac{10^{2n}-1}{10-1} = \frac{(10^n)^2-1}{9}$.

et $y = 2\times(10^{n-1} + \cdots + 10 + 1) = 2\times\frac{10^n-1}{9}$.

Ainsi, $x-y = \frac{1}{9}\left((10^n)^2 - 2\cdot 10^n + 1\right) = \frac{1}{9}(10^n-1)^2 = \Big(\underbrace{3\times\frac{10^n-1}{9}}_{\geq 0}\Big)^2$

Ainsi $\boxed{\sqrt{x-y} = 3\times\frac{10^n-1}{9} = 3\times(10^{n-1}+\cdots+10+1) \text{ est en entier.}}$

R2 La fonction $f : x \mapsto x(1-x) = x - x^2$ est dérivable, et $f' : x \mapsto 1-2x$.

x		$1/2$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$

Le tableau de variations assure que $f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout réel x.

. Si $a \leq b$ alors $a(1-b) \leq a(1-a) \leq \frac{1}{4}$ car $a \geq 0$

. Si $b \leq c$ on trouve de même $b(1-c) \leq \frac{1}{4}$.

. Si $c \leq a$ 〃 〃 〃 $c(1-a) \leq 1/4$.

Enfin l'une de ces trois conditions est vraie sinon $a > b > c > a$ (ABSURDE).
Ainsi l'un des réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $1/4$.

R3 On suppose f constante, de valeur notée M. Soit g fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f(g(f(x))) = M$ et $f(x) = M$, donc (f,g) vérifie $(\mathcal{C}_3)$.

Réciproquement, on suppose que (f,g) vérifie $(\mathcal{C}_3)$ pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Choisissons pour g la fonction constante de valeur 0.
Alors, pour tout réel x, $f(x) = f(g(f(x))) = f(0)$. Donc f est constante.