Nom et Prénom :

Code Sujet : ○ ○ ○

A B C D E F G H K L M N P R S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

△ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option B △

R4 Notons $x_n = \frac{n^2+1}{2023n+\sin(n)+1}$. On observe que $x_n \geqslant \frac{n^2}{2023(n-1)} = \frac{n}{2023(1-\frac{1}{n})}$ si $n>2$. Le minorant tend vers $+\infty$, donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Soit A, partie non vide de $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. Choisissons y dans A. Il existe, vu ce qui précède, un entier $q\in\mathbb{N}$ tel que $x_n > y$ pour tout entier $n\geqslant q$.
Ainsi $B = A\cap\,]-\infty, y]$ est fini (car inclus dans $\{x_0, \dots, x_{q-1}\}$) et non vide ($y\in B$).
On prend le plus petit élément m de B. On vérifie alors facilement que m est le plus petit élément de A.
(Soit x dans A : si $x\leqslant y$ alors $m\leqslant x$ par définition de m ;
sinon $m\leqslant y\leqslant x$; enfin $m\in A$.)

R5 D'abord $m\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$ (il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ paires de points dans E).

Prenons une droite $\mathcal{D}$, $\Omega\in\mathcal{D}$, $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigeant $\mathcal{D}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ prenons le point P_k tel que $\overrightarrow{\Omega P_k} = 2^k\vec{u}$. Vérifions que $m=\frac{n(n-1)}{2}$ pour $E=\{P_1,\dots,P_n\}$. Il s'agit de montrer que les distances $P_1P_2, P_1P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ sont distinctes.
Soit donc $i<j$ et $k<l$ (dans $\mathbb{N}^*$). Supposons $P_iP_j = P_kP_l$, i.e. $2^l-2^k = 2^j-2^i$.
Si $l<j$ alors $2^l-2^k < 2^{j-1}\leqslant 2^j-2^i$. Ainsi $\boxed{l\geqslant j}$. Symétriquement $j\geqslant l$ donc $\boxed{l=j}$. Ensuite $2^k=2^i$ donc $\boxed{k=i}$.

L1 La seule solution est 0.	**L2** Les solutions sont $\ln(\sqrt{2}+1)$ et $\ln(\sqrt{2}-1)$
L3 Les solutions sont les fonctions constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.	**L4** $\begin{cases} 0 \text{ et } n & \text{si } n>1 \\ n & \text{si } n=1 \end{cases}$
L5 $\{0 ; 1 ; \sqrt{2}\}$ et $\mathbb{N}^*$	**L6** La plus petite valeur possible pour m est 2.
L7 La plus petite valeur possible pour m est 3.	**L8** $a = \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil$ (plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{n-1}{k}$)