J. 24 1219

Nom et Prénom :

Code Sujet : ◯ ◯ ◯

A B C D E F G H K L M N P R S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

◯ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option A ◯

R1 On note r la raison de u ; s celle de v. Alors $\rho := \frac{s}{r}$ est défini et $\rho \neq 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u*v)_n = u_0 v_0 (r^n + r^{n-1}s + \dots + r s^{n-1} + s^n)$

$$= u_0 v_0 r^n (1 + \rho + \dots + \rho^{n-1} + \rho^n)$$

$$= u_0 v_0 r^n (\rho - 1)^{-1} (\rho^{n+1} - 1) \quad \text{car } \rho \neq 1$$

$$(u*v)_n = \left(\frac{u_0 v_0}{r - s} r\right) r^n + \left(\frac{u_0 v_0}{s - r} s\right) s^n.$$

R2 Montrons qu'il existe une <u>unique</u> suite réelle u telle que $u*b = c$, ce qui est bien la proposition correcte la plus précise proposée.

Pour une suite réelle u, la condition $u*b = c$ se traduit par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{c_0}{b_0} \\ \forall n \geq 1,\ u_n = \left(-\dfrac{b_1}{b_0}\right) u_{n-1} + \dots + \left(-\dfrac{b_n}{b_0}\right) u_0 + \dfrac{c_n}{b_0} \end{cases} \quad \text{car } b_0 \neq 0.$$

Ces conditions déterminent bien, de proche en proche, une unique suite réelle (construction de suites par récurrence).

R3 Soit d un entier strictement positif divisant à la fois

$a := 2 \cdot 10! + 1$ et $b := 3 \cdot 10! + 1$.

Alors d divise $3a - 2b = 1$. Ainsi $d = 1$.

Conclusion : $2 \cdot 10! + 1$ et $3 \cdot 10! + 1$ sont premiers entre eux.

R4 Supposons qu'il existe un système de Steiner T sur E_5

La paire $\{1;2\}$ est incluse dans un unique triplet de T, qu'on note $\{1;2;i\}$

Notons j et k les éléments de E_5 restants.

La paire $\{1;j\}$ est dans un unique triplet t_j de T,

la paire $\{1;k\}$ " " t_k de T.

t_j ne peut alors contenir ni 2 ni i, donc $k \in t_j$.

De même $j \in t_k$. Ainsi $\{j;k\}$ est incluse dans t_j et t_k, alors que $t_j \neq t_k$

C'est $\boxed{\text{ABSURDE}}$. Conclusion : il n'y a pas de système de Steiner sur E_5.