



2024

Mathématiques Expertes

Épreuve 2, Option A

16 mars 2024

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ○ ○ ●

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1, M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1, L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1, R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ○ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

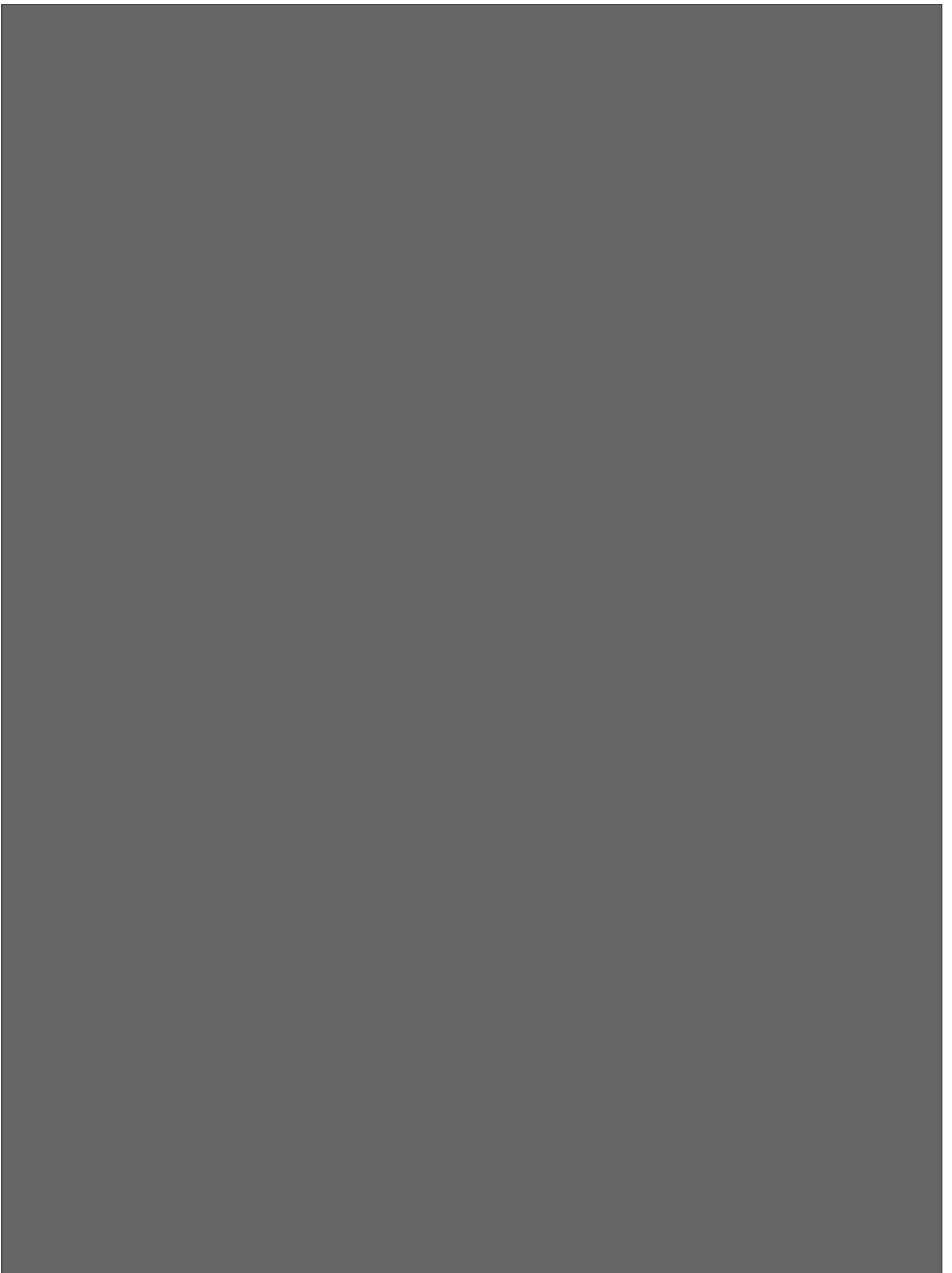
CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TeSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).

Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES



Exercice 1. Nombres complexes : calculs

□ **M1** Le produit des deux nombres complexes $2 - 3i$ et $i + 2$ vaut :

- A** $7 - 4i$
 B $1 - 4i$
 C $1 + 4i$
 D $7 + 4i$
 E $1 + 6i$

□ **M2** Soit x et y deux nombres réels. Le nombre complexe $(x - iy)^2$ est systématiquement égal à :

- A** $-x^2 + y^2 + 2ixy$
 B $x^2 + y^2 + 2ixy$
 C $x^2 - y^2 + 2ixy$
 D $x^2 - y^2 - 2ixy$
 E $x^2 + y^2 - 2ixy$

□ **M3** Le nombre complexe $\frac{1}{-11 + i}$ vaut :

- A** $\frac{-11 + i}{120}$
 B aucune des autres réponses proposées
 C $\frac{-11 - i}{120}$
 D $\frac{11 - i}{122}$
 E $\frac{-11 + i}{122}$

□ **M4** Le quotient $\frac{1 - 5i}{3 - i}$ vaut :

- A** $\frac{8 - 14i}{10}$
 B $\frac{-2 + 14i}{10}$
 C $\frac{8 + 14i}{\sqrt{10}}$
 D aucune des autres réponses proposées
 E $\frac{8 - 14i}{\sqrt{10}}$

□ **M5** Les solutions complexes de $5z^2 + 2z + 1 = 0$ sont :

- A** $\frac{-1 + 2i}{5}$ et $\frac{-1 - 2i}{5}$
 B $\frac{1 + 2i}{5}$ et $\frac{1 - 2i}{5}$
 C $\frac{-1 + 2i}{10}$ et $\frac{-1 - 2i}{10}$
 D $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$
 E $\frac{1 + 2i}{10}$ et $\frac{1 - 2i}{10}$

△ **L1** Donner le module et un argument du nombre complexe $1 - i$.

□ **M6** Le module et un argument de $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ sont :

- A** 1 et $\frac{\pi}{6}$
 B 2 et $\frac{\pi}{6}$
 C 1 et $\frac{\pi}{3}$
 D $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$
 E aucune des autres réponses proposées

M7 Le module et un argument de $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$ sont :

A aucune des autres réponses proposées

B 1 et $-\frac{2\pi}{3}$

C 4 et $\frac{2\pi}{3}$

D 2 et $\frac{5\pi}{3}$

E 2 et $\frac{\pi}{3}$

Exercice 2. Produit de convolution de deux suites

Dans tout l'exercice, on appelle suite réelle toute suite à termes réels définie à partir du rang 0.

Pour deux suites réelles u et v , on note $u = v$ pour signifier que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque a désigne un nombre réel, on note \tilde{a} la suite réelle dont tous les termes sont égaux à a , autrement dit $\tilde{a}_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier $\tilde{0}$ a tous ses termes nuls, et est appelée la **suite nulle**.

On note e la suite réelle définie par $e_0 = 1$ et $e_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Lorsque $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent deux suites réelles, on définit une nouvelle suite réelle, notée $u \star v$ et appelée produit de convolution de u et v , en posant

$$(u \star v)_0 = u_0 v_0 \quad , \quad (u \star v)_1 = u_1 v_0 + u_0 v_1 \quad , \quad (u \star v)_2 = u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2$$

...

$$(u \star v)_n = u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \dots + u_1 v_{n-1} + u_0 v_n \quad \text{etc.}$$

L2 On considère la suite u définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 2$ et $u_n = 1$ pour tout entier $n \geq 2$. Donner la valeur de $(u \star u)_3$.

M8 On considère la suite u définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 2$ et $u_n = 1$ pour tout entier $n \geq 2$. Alors $(u \star u)_{10}$ vaut :

A 28 **B** 29 **C** 18 **D** 12 **E** 19

Vrai ou faux ?

Dans les questions **M9**, **M10**, **M11** et **M12**, on demande d'évaluer la validité des propositions indiquées.

M9 On a $u \star \tilde{0} = \tilde{0}$ pour toute suite réelle u .

A Vrai **B** Faux

M10 On a $u \star \tilde{1} = u$ pour toute suite réelle u .

A Vrai **B** Faux

M11 On a $u \star e = u$ pour toute suite réelle u .

A Faux **B** Vrai

M12 On a $u \star v = v \star u$ quelles que soient les suites réelles u et v .

A Faux **B** Vrai

M13 On considère la suite réelle w définie par $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geq 2$. Pour toute suite réelle u et tout entier naturel n :

A $(u \star w)_{n+1} = u_n$

B aucune des autres réponses proposées n'est vraie en toute généralité

C $(u \star w)_n = u_{n-1}$

D $(u \star w)_n = u_{n+1}$

M14 On considère la suite réelle u définie par $u_n = 1$ si n est pair, et $u_n = 0$ si n est impair ; on considère aussi la suite réelle v définie par $v_n = 0$ si n est pair, et $v_n = 1$ si n est impair. Pour tout entier naturel n :

A $(u \star v)_n = (n + 2)/2$ si n est pair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est impair

B $(u \star v)_n = n/2$ si n est pair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est impair

C $(u \star v)_n = (n - 1)/2$ si n est impair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est pair

D aucune des autres réponses proposées n'est vraie en toute généralité

E $(u \star v)_n = (n + 1)/2$ si n est impair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est pair

Suites arithmétiques/géométriques

Dans les questions **M15** à **M19**, on fixe deux suites réelles u et v . On rappelle que toute suite constante est arithmétique (de raison 0).

M15 Si u et v sont constantes, alors $u \star v$:

A est arithmétique

B peut n'être ni arithmétique ni géométrique, selon le choix de u et v

C est géométrique

M16 Si u et v sont arithmétiques alors $u \star v$:

A n'est jamais arithmétique

B peut être arithmétique ou non, selon le choix de u et v

C est arithmétique

L3 On suppose u géométrique de raison 2 et v géométrique de raison 4. Donner une expression simplifiée de

$(u \star v)_n$ en fonction de n , u_0 et v_0 .

M17 Si u et v sont géométriques de raisons non nulles différentes, et si $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$, alors $u \star v$:

- A** n'est jamais géométrique
 B peut être géométrique ou non, selon les valeurs respectives de u et v
 C est géométrique

M18 Si u et v sont géométriques de raisons non nulles différentes, et si $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$, alors $u \star v$:

- A** est la somme de deux suites géométriques
 B peut être la somme de deux suites géométriques ou non, selon les valeurs respectives de u et v
 C n'est jamais la somme de deux suites géométriques

R1 Justifier votre réponse à la question **M18**.

M19 Si u et v sont géométriques et de raisons différentes de 0 et 1, alors $u \star v$:

- A** peut être arithmétique ou non, selon les valeurs respectives de u et v
 B est arithmétique
 C n'est jamais arithmétique

Valuation, résolution d'équations

Soit u une suite réelle différente de $\tilde{0}$. Il existe donc un entier $n \geq 0$ tel que $u_n \neq 0$, et on note $\alpha(u)$ le plus petit de ces entiers, appelé **valuation** de u . Par exemple, pour une suite u vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = -4$ et $u_3 = 9$, on a $\alpha(u) = 2$.

M20 Soit u et v deux suites réelles différentes de $\tilde{0}$. On note p la valuation de u , et q celle de v . On note m le plus petit des entiers p et q , et M le plus grand d'entre eux. On peut alors affirmer :

- A** qu'aucune des autres affirmations n'est systématiquement vraie
 B que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < pq$, mais que $(u \star v)_{pq} \neq 0$
 C que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < p + q$, mais que $(u \star v)_{p+q} \neq 0$
 D que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < m$, mais que $(u \star v)_m \neq 0$
 E que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < M$, mais que $(u \star v)_M \neq 0$

M21 Soit u et v deux suites différentes de la suite nulle. On peut alors affirmer :

- A** que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est le plus petit des entiers $\alpha(u)$ et $\alpha(v)$
 B que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est $\alpha(u) + \alpha(v)$
 C qu'aucune des autres affirmations n'est systématiquement vraie
 D que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est le plus grand des entiers $\alpha(u)$ et $\alpha(v)$
 E que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est $\alpha(u)\alpha(v)$

- M22** Soit b une suite réelle. S'il existe une suite réelle u telle que $u \star b = e$, alors la conséquence la plus précise que l'on puisse en tirer est :
- A** aucune des autres affirmations n'est vraie en toute généralité
 - B** $b_1 \neq 0$
 - C** $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - D** il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \neq 0$
 - E** $b_0 \neq 0$
- M23** On fixe deux suites réelles b et c telles que $b_0 \neq 0$. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est :
- A** il n'existe aucune suite réelle u telle que $u \star b = c$
 - B** aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
 - C** il existe une et une seule suite réelle u telle que $u \star b = c$
 - D** il existe plusieurs suites réelles u telles que $u \star b = c$
 - E** il existe au moins une suite réelle u telle que $u \star b = c$
- R2** Justifier votre réponse à la question **M23**.
- M24** Soit b une suite réelle non nulle. S'il existe une suite réelle u telle que $u \star u = b$, alors :
- A** on peut affirmer que la valuation de u est paire
 - B** on peut affirmer que la valuation de b est paire
 - C** on peut affirmer que la valuation de b est impaire
 - D** aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
 - E** on peut affirmer que la valuation de u est impaire
- M25** Soit b une suite réelle telle que $b_0 > 0$. On peut alors affirmer :
- A** qu'il existe exactement deux suites réelles u telles que $u \star u = b$
 - B** qu'il existe exactement une suite réelle u telle que $u \star u = b$
 - C** qu'aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
 - D** qu'il existe une infinité de suites réelles u telles que $u \star u = b$
 - E** qu'il n'existe aucune suite réelle u telle que $u \star u = b$

Exercice 3. Arithmétique

△ **L4** Parmi les entiers suivants, indiquer lesquels sont premiers :

1, 2, 43, 59, 111, 143, 147, 187

□ **M26** Le pgcd de 720 et 210 est :

A 60 **B** 30 **C** 90 **D** 15 **E** 105

□ **M27** Le nombre 66 est premier avec :

A 45 **B** 111 **C** 35 **D** 143 **E** 105

□ **M28** Le dernier chiffre de 2023^{2024} est :

A 2 **B** 1 **C** 7 **D** 9 **E** 3

□ **M29** On rappelle que $10! = 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times 10$. On considère les nombres $2 + 10!$, $3 + 10!$, \dots , $9 + 10!$. Parmi ces nombres, combien sont premiers ?

A Aucun **B** Un **C** Tous **D** Trois **E** Deux

□ **M30** Le pgcd des nombres $2 \cdot 10! + 1$ et $3 \cdot 10! + 1$ est :

A aucune des autres réponses **B** 1 **C** 5 **D** 3 **E** 7

○ **R3** Justifier votre réponse à la question **M30**.

□ **M31** Vrai ou Faux ? Tout entier $a \geq 4$ est de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$, où k est un entier naturel.

A Vrai **B** Faux

□ **M32** Vrai ou Faux ? Tout entier impair $a \geq 1$ est de la forme $4k + 1$ ou $4k + 3$, où k est un entier naturel.

A Vrai **B** Faux

□ **M33** Vrai ou Faux ? Pour tout entier impair $a \geq 1$, le nombre $a^2 - 1$ est divisible par 8.

A Faux **B** Vrai

□ **M34** Vrai ou Faux ? Pour tout entier $a \geq 5$ non divisible par 3, le nombre $a^2 - 1$ est divisible par 24.

A Vrai **B** Faux

□ **M35** Combien y a-t-il de nombres premiers p tels que $p - 2$ et $p + 2$ soient premiers ?

A 0 **B** une infinité **C** 4 **D** 2 **E** 1

Exercice 4. Nombres complexes et trigonométrie

□ **M36** Soit z un nombre complexe. À partir de l'hypothèse qu'il existe un nombre réel x tel que $z = x\bar{z}$, la conséquence la plus précise que l'on puisse en tirer est :

- A** z est imaginaire pur
 B l'un des nombres z ou iz est réel
 C aucune des autres réponses proposées
 D z est un nombre réel
 E z est de module 1

□ **M37** Soit a et b deux nombres réels non nuls, et n un entier naturel non nul. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est :

- A** $(a + ib)^n + (a - ib)^n$ est réel négatif
 B $(a + ib)^n + (a - ib)^n$ est imaginaire pur
 C aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
 D $(a + ib)^n + (a - ib)^n$ est réel positif
 E $(a + ib)^n + (a - ib)^n$ est réel

□ **M38** Soit a et b deux nombres réels non nuls, et n un entier naturel non nul. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est :

- A** $(a + ib)^n - (a - ib)^n$ est réel
 B $(a + ib)^n - (a - ib)^n$ est réel positif
 C aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
 D $(a + ib)^n - (a - ib)^n$ est réel négatif
 E $(a + ib)^n - (a - ib)^n$ est imaginaire pur

□ **M39** Soit n un entier naturel non nul. Le nombre complexe $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ est systématiquement égal à :

- A** 2^n **B** $(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$ **C** $2^n \cos \frac{n\pi}{4}$ **D** $2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$ **E** $2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{4}$

□ **M40** Soit n un entier naturel non nul. La somme

$$\binom{2n}{0} - \binom{2n}{2} + \cdots + (-1)^p \binom{2n}{2p} + \cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n}$$

est égale à :

- A** $2^n \cos \frac{n\pi}{2}$ **B** $(\sqrt{2})^{n+2} \cos \frac{n\pi}{4}$ **C** 2^{2n-1} **D** $(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$ **E** $2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

□ **M41** L'ensemble des valeurs prises par $|e^{it} - 1|$ lorsque t varie dans $]0; \frac{\pi}{2}[$ est :

- A** $] -\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ **B** $]0; \sqrt{2}[$ **C** $]0; 1[$ **D** $[0; 1[$ **E** $[0; \sqrt{2}[$

□ **M42** Les complexes z tels que $z^{10} = 1$ et $\text{Im}(z) \geq 0$ sont au nombre de :

- A 4 B 2 C 6 D 5 E 10

Exercice 5. Systèmes de Steiner

On définit la terminologie suivante :

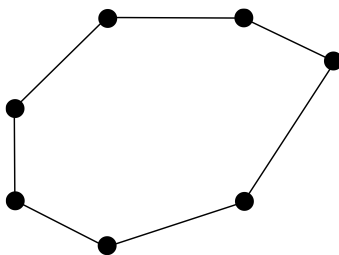
- Une **paire** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E possédant exactement deux éléments. Par exemple, les ensembles $\{1; 3\}$ et $\{2; 4\}$ sont des paires de l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. On rappelle que les ensembles $\{3; 1\}$ et $\{1; 3\}$ sont identiques puisqu'ils ont les mêmes éléments.
- Un **triplet** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E possédant exactement trois éléments. Par exemple $\{1; 2; 4\}$ est un triplet de $\{1; 2; 3; 4; 5\}$, égal au triplet $\{4; 2; 1\}$, au triplet $\{1; 4; 2\}$ etc.
- Une paire est dite **incluse** dans un triplet lorsque tout élément de la paire est aussi un élément du triplet. Par exemple $\{1; 4\}$ est incluse dans $\{1; 2; 4\}$ (les éléments 1 et 4 sont tous deux dans $\{1; 2; 4\}$), mais $\{1; 5\}$ n'est pas incluse dans $\{1; 2; 4\}$ car 5 appartient à $\{1; 5\}$ mais pas à $\{1; 2; 4\}$.

Dans tout l'exercice, on note E_n l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n , autrement dit

$$E_n = \{1; 2; \dots; n\}.$$

Un peu de dénombrement

Dans les questions **M43**, **M44** et **M45**, on considère les 7 sommets d'un heptagone convexe.



□ **M43** Le nombre de paires de sommets de l'heptagone est :

- A 14 B aucune des autres réponses proposées C 21 D 42 E 13

□ **M44** Le nombre de paires de sommets de l'heptagone qui ne sont pas côte-à-côte est :

- A aucune des autres réponses proposées B 11 C 28 D 12 E 14

□ **M45** Le nombre total de triangles que l'on peut former sur des sommets de l'heptagone et qui n'ont pas de côté commun avec l'heptagone est :

- A 7 B aucune des autres réponses proposées C 2 D 21 E 3

□ **M46** Soit un entier naturel $n \geq 3$. Le nombre de paires de E_n et le nombre de triplets de E_n sont respectivement égaux à :

- A** $\frac{n(n-1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
- B** $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
- C** $\frac{n(n-1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$
- D** $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- E** 2^{n-1} et 2^{n-2}

△ **L5** Donner tous les entiers $n \geq 3$ tels que E_n ait autant de paires que de triplets.

Introduction aux systèmes de Steiner

On considère dans la suite un ensemble fini E . Un **système de Steiner** sur E est un ensemble T tel que :

- (i) Les *éléments* de T sont des triplets de E .
- (ii) Toute paire $\{i, j\}$ de E est incluse dans un et un seul élément de T .

Par exemple, pour $E = \{1; 2; 3\}$:

- l'ensemble T formé de $\{1; 2; 3\}$ et $\{1; 2\}$ n'est pas un système de Steiner car il n'est pas exclusivement constitué de triplets (l'objet $\{1; 2\}$ de T n'est pas un triplet) ;
- l'ensemble T formé du seul triplet $\{1; 2; 3\}$ est bien un système de Steiner. En effet, $\{1; 2; 3\}$ est bien un triplet, et toute paire de $\{1; 2; 3\}$ est incluse dans $\{1; 2; 3\}$, qui est le seul élément de T .

Autre exemple, sur $E_4 = \{1; 2; 3; 4\}$, l'ensemble T formé des quatre triplets $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 4\}$, $\{2; 3; 4\}$ et $\{1; 3; 4\}$ n'est pas un système de Steiner : bien que toute paire de E_4 soit incluse dans l'un de ses éléments (ce que l'on vérifie facilement), la paire $\{1; 2\}$ est incluse dans plusieurs éléments de T .

□ **M47** Sur E_4 , l'ensemble T formé du seul triplet $\{1; 2; 3\}$:

- A** n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 n'est incluse dans aucun élément de T
- B** n'est pas un système de Steiner car T n'est pas constitué uniquement de triplets
- C** n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T
- D** est un système de Steiner
- E** n'est pas un système de Steiner car n'importe quelle paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T

□ **M48** Sur E_4 , l'ensemble T formé des triplets $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 4\}$ et $\{2; 3; 4\}$:

- A** n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T
- B** n'est pas un système de Steiner car n'importe quelle paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T
- C** n'est pas un système de Steiner car T n'est pas constitué uniquement de triplets
- D** est un système de Steiner
- E** n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 n'est incluse dans aucun élément de T

Vrai ou faux ?

M49 Il existe un et un seul système de Steiner sur E_3 .

A Faux **B** Vrai

M50 Il existe un système de Steiner sur E_4 .

A Vrai **B** Faux

M51 Il existe un système de Steiner sur E_5 .

A Faux **B** Vrai

R4 Justifier votre réponse à la question **M51**.

M52 Pour obtenir un système de Steiner sur E_7 , quels triplets adjoindre aux triplets $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 6; 7\}$, $\{2; 4; 6\}$, $\{3; 4; 7\}$ et $\{3; 5; 6\}$?

A $\{2; 4; 5\}$ et $\{1; 5; 7\}$

B aucune des autres réponses proposées ne convient

C $\{2; 5; 7\}$ et $\{1; 4; 5\}$

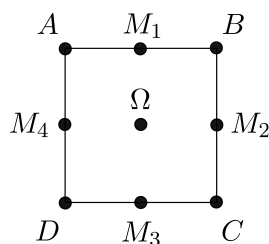
D $\{2; 5; 7\}$ et $\{1; 5; 6\}$

E $\{2; 5; 6\}$ et $\{1; 4; 7\}$

Une construction sur un carré

On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère orthonormal.

On considère un carré représenté par le dessin suivant :



On note E l'ensemble constitué des sommets du carré, des milieux des côtés, et du centre du carré. Ces points sont représentés par des pastilles \bullet sur le dessin.

On forme :

- l'ensemble T_c des triplets constitués de trois points de E alignés sur une droite parallèle à l'un des côtés du carré ;
- l'ensemble T_d constitués des deux diagonales $\{A; \Omega; C\}$ et $\{B; \Omega; D\}$.

On réunit ces deux ensembles de triplets pour former un ensemble T .

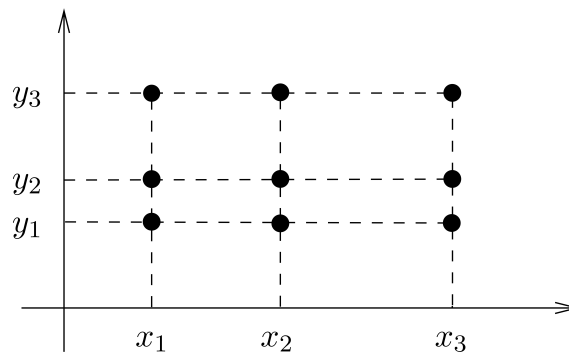
□ **M53** L'ensemble T n'est pas un système de Steiner sur E parce que :

- A** T n'est pas constitué uniquement de triplets
- B** aucune paire de E n'est incluse dans au moins un élément de T
- C** toutes les paires de E sont incluses dans plusieurs éléments de T
- D** au moins une paire de E n'est incluse dans aucun élément de T
- E** au moins une paire de E est incluse dans plusieurs éléments de T

△ **L6** Quels triplets rajouter à T pour obtenir un système de Steiner sur E ?

On obtient ainsi plus généralement la construction suivante : étant donné deux triplets $A = \{x_1; x_2; x_3\}$ et $B = \{y_1; y_2; y_3\}$ de nombres, on considère l'ensemble E des points du plan dont l'abscisse est dans A , et l'ordonnée dans B . Alors E possède un système de Steiner, et mieux il existe un système de Steiner sur E contenant, entre autres :

- tous les triplets de points de E alignés sur une même droite horizontale;
- tous les triplets de points de E alignés sur une même droite verticale.



□ **M54** Ce qui précède permet d'affirmer :

- A** qu'aucune des autres affirmations n'est vraie
- B** qu'aucun ensemble fini de cardinal 9 ne possède de système de Steiner
- C** que tout ensemble fini de cardinal 9 possède un système de Steiner
- D** que certains ensembles finis de cardinal 9 possèdent un système de Steiner, mais peut-être pas tous

Une idée séduisante

Pour une certaine valeur de l'entier $n \geq 6$, Jean-Pascal cherche à construire un système de Steiner sur E_n . On suppose qu'il a déjà réussi :

- à partager E_n en deux sous-ensembles A et B , tous deux non vides, et sans élément commun;
- à construire, avec quelque effort, un système de Steiner T sur A et un système de Steiner T' sur B .

Il réunit les deux systèmes, c'est-à-dire qu'il prend tous les triplets qui sont soit dans T soit dans T' . Il obtient ainsi un ensemble $T \cup T'$ de triplets de E_n .

□ **M55** L'ensemble $T \cup T'$ n'est pas un système de Steiner sur E_n parce que :

- A** au moins une paire de E_n est incluse dans plusieurs éléments de $T \cup T'$
- B** $T \cup T'$ n'est pas constitué uniquement de triplets
- C** au moins une paire de E_n n'est incluse dans aucun élément de $T \cup T'$
- D** toutes les paires de E_n sont incluses dans plusieurs éléments de $T \cup T'$

Jean-Pascal a bien compris que sa construction n'est pas suffisante. Il va donc tenter de la modifier, soit en retirant des triplets à $T \cup T'$, soit en rajoutant des triplets à $T \cup T'$.

M56 Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A** Il est possible, pour au moins un jeu de données n, A, B, T, T' , d'obtenir un système de Steiner sur E_n à partir de $T \cup T'$ en rajoutant certains triplets bien choisis
- B** Il est possible, pour au moins un jeu de données n, A, B, T, T' , d'obtenir un système de Steiner sur E_n à partir de $T \cup T'$ en retirant certains triplets bien choisis
- C** Aucune des autres réponses n'est correcte

R5 Justifier votre réponse à la question **M56**.

Une autre idée séduisante

Jean-Pascal considère maintenant la situation suivante. Il prend deux entiers naturels $n \geq 3$ et $p \geq 3$ pour lesquels il a réussi à construire un système de Steiner T_n sur E_n et un système de Steiner T_p sur E_p . Il considère l'ensemble F des points du plan dont l'abscisse x est dans E_n et l'ordonnée y dans E_p . Il espère construire un système de Steiner sur F .

M57 Si Jean-Pascal parvient à ses fins, il saura qu'il existe un système de Steiner sur E_N pour N égal à :

- A** $n + p$ **B** np **C** n^p **D** aucun des autres nombres indiqués, en général **E** p^n

Jean-Pascal regroupe alors tous les triplets suivants :

- (i) ceux qui sont formés de trois points ayant la même abscisse, et les ordonnées appartiennent à un même triplet du système de Steiner T_p ;
- (ii) ceux qui sont formés de trois points ayant la même ordonnée, et les abscisses appartiennent à un même triplet du système de Steiner T_n ;
- (iii) enfin, pour chaque triplet A dans T_n et chaque triplet B dans T_p , il prend tous les triplets d'un système de Steiner décrit à partir de A et B entre les questions **L6** et **M54**.

Il forme ainsi un ensemble de triplets qu'il note T . Jean-Pascal prétend alors que T est un système de Steiner sur F . Voici son raisonnement :

Soit $\{M, N\}$ une paire de F .

Étape 1 : les points M et N sont différents, donc leurs coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ vérifient $x \neq x'$ et $y \neq y'$.

Étape 2 : Puisque $\{x; x'\}$ est une paire de E_n , on la rentre dans un unique triplet A du système T_n .

Étape 3 : Puisque $\{y; y'\}$ est une paire de E_p , on la rentre dans un unique triplet B du système T_p .

Étape 4 : La paire $\{M; N\}$ est alors incluse dans un unique triplet construit à partir de A et B (point (iii) ci-dessus).

Étape 5 : La paire $\{M; N\}$ est alors incluse dans un unique élément du système T .

Chacune de ces étapes, *en admettant la validité des précédentes*, est soit juste, soit fausse, soit incomplète car l'affirmation ne découle pas de manière immédiate de la situation (il manque une justification).

M58 L'étape 1 est :

- A** juste **B** fausse **C** incomplète

M59 En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 2 est :

- A incomplète B juste C fausse

M60 En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 3 est :

- A incomplète B fausse C juste

M61 En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 4 est :

- A incomplète B juste C fausse

M62 En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 5 est :

- A juste B incomplète C fausse

Une question de cardinal

On suppose dans cette partie que E_n possède un système de Steiner T .

M63 Le nombre de paires de E_n qui contiennent 1 et le nombre de triplets dans T qui contiennent 1 sont respectivement égaux à :

- A aucune des autres réponses proposées, en général B n et $\frac{n-1}{2}$ C $n-1$ et $\frac{n+1}{3}$
 D $n-1$ et $\frac{n+2}{3}$ E $n-1$ et $\frac{n-1}{2}$

M64 Le nombre de triplets qui composent le système de Steiner T vaut :

- A $\frac{n+2}{3}$ B $\frac{n-1}{2}$ C $\frac{n+1}{2}$ D $\frac{n(n-1)}{6}$ E $n-1$

△ L7 Donner, au vu de ce qui précède, les restes possibles dans la division euclidienne de n par 3.

M65 Les restes possibles dans la division euclidienne de n par 6 sont :

- A 1 et 3 B 0, 1, et 3 C 1, 3 et 5 D 1, 2 et 3 E 1, 3 et 4

M66 On peut affirmer que tout diviseur premier de n est congru modulo 6 à :

- A 1, 3 ou 0 B 1, 3 ou -1 C 1, -1 , ou 0 D -1 ou 3 E 1 ou 3

M67 Au vu du reste de l'exercice, quel est le plus grand des nombres p suivants pour lequel la question de l'existence d'un système de Steiner sur E_p reste en suspens ?

- A 49 B 15 C 21 D 62 E 25