TeSciA

2024

Mathématiques Générales

Épreuve 1

16 mars 2024

14h-15h30 heure de Paris

Code sujet : ◯ ◯ ⬤

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TeSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).

Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES

Exercice 1. Une fonction rationnelle

On considère dans cet exercice la fonction f qui à tout réel x différent de 0 et -1 associe le réel

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

☐ **M1** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $f(x)$ tend :

A vers aucune limite B vers $+\infty$ C vers 2 D vers 0 E vers 1

☐ **M2** Quand x tend vers 0^+, la quantité $f(x)$ tend :

A vers $-\infty$ B vers 1 C vers $+\infty$ D vers aucune limite E vers 0

☐ **M3** Quand x tend vers 0^-, la quantité $f(x)$ tend :

A vers 1 B vers aucune limite C vers $+\infty$ D vers $-\infty$ E vers 0

☐ **M4** La dérivée de f est la fonction qui à x associe :

A $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

B $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

C $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$

D aucune des autres valeurs indiquées en général

E $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$

☐ **M5** Sur l'intervalle $]-1;0[$, la fonction f :

A est strictement décroissante

B est constante de valeur 1

C est strictement croissante

D n'est ni croissante ni décroissante

◯ **R1** Dresser sans justification le tableau de variation de f sur son domaine de définition. On indiquera en particulier les limites aux bornes des trois intervalles formant le domaine de définition de f.

☐ **M6** On donne un réel y. L'équation $f(x) = y$ admet alors :

A systématiquement une solution

B une, deux ou trois solutions, selon la valeur de y

C une ou deux solutions, selon la valeur de y

D exactement deux solutions

E un nombre fini de solutions, mais peut n'en admettre aucune selon la valeur de y

△ **L1** Préciser la ou les valeurs du réel y pour lesquelles $f(x) = y$ admet une unique solution.

□ **M7** Soit a et b deux réels. Lorsque l'équation $x^2 + ax + b = 0$ possède exactement deux solutions, la somme de ces solutions est :

A $\frac{a}{2}$ B $-2a$ C $-\frac{a}{2}$ D $2a$ E aucune des autres réponses en général

△ **L2** On fixe ici un réel y pour lequel l'équation $f(x) = y$ admet exactement deux solutions, notées x_1 et x_2. Donner en fonction de y la valeur de la somme $x_1 + x_2$.

Exercice 2. Une famille de droites

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan euclidien. Soit m un nombre réel. On note $\mathcal{C}_m$ l'ensemble de points du plan défini dans ce repère par l'équation

$$(m^2 - 1)\,x + (m^2 + m - 2)\,y - 3m + 4 = m,$$

et on note Δ_m l'ensemble de points du plan défini dans ce repère par l'équation

$$(m + 1)\,x + (m + 2)\,y - 4 = 0.$$

□ **M8** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

A Δ_m est une droite pour certaines valeurs de m, mais pas pour d'autres

B Δ_m est une droite quelle que soit la valeur de m

C Δ_m n'est une droite pour aucune valeur possible de m

□ **M9** L'ensemble Δ_m est une droite parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si :

A $m = 2$ B $m = 3$ C $m = -1$ D $m = -2$ E $m = 0$

□ **M10** L'ensemble Δ_m est une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses si et seulement si :

A $m = -2$ B $m = 0$ C $m = 2$ D $m = 3$ E $m = -1$

□ **M11** L'ensemble $\mathcal{C}_1$ est :

A le plan tout entier

B l'ensemble vide

C constitué d'un seul point

D constitué de deux points

E constitué de trois points

☐ **M12** L'ensemble $\mathcal{C}_m$ est :

A une droite ou le plan tout entier, selon la valeur de m

B aucune des autres réponses proposées

C une droite, quelle que soit la valeur de m

D une droite ou l'ensemble vide, selon la valeur de m

E un ensemble fini quelle que soit la valeur de m

☐ **M13** On donne un autre réel p, et on suppose que Δ_m et Δ_p sont des droites. Pour que Δ_m et Δ_p soient perpendiculaires, il faut et il suffit que :

A $(m+1)(p+2)-(m+2)(p+1)=1$

B aucune des autres réponses proposées

C $(m+1)(p+1)-(m+2)(p+2)=0$

D $(m+1)(p+2)-(m+2)(p+1)=0$

E $(m+1)(p+1)+(m+2)(p+2)=0$

△ **L3** Donner les coordonnées d'un point du plan par lequel passent une infinité de droites Δ_m.

△ **L4** Donner l'équation d'une droite qui n'est parallèle à aucune des droites Δ_m.

Exercice 3. Calculs, Fractions

☐ **M14** La puissance quatrième de $\sqrt{1+\sqrt{1+1}}$ est :

A $2+\sqrt{2}$ B 5 C $2+2\sqrt{2}$ D $3+2\sqrt{2}$ E 3

☐ **M15** Lorsque x est un réel non nul, la fraction $\dfrac{\frac{1}{x}-x}{x+\frac{1}{x}}$ est systématiquement égale à :

A $\dfrac{x-1}{x+1}$ B aucune des autres propositions C $\dfrac{1}{x^2}-x^2$ D $\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$ E $\dfrac{1-x}{x+1}$

☐ **M16** Étant donné un nombre entier p, on considère les nombres $x=1+2^p$ et $y=1+2^{-p}$. Alors y vaut :

A aucune des autres propositions B $\dfrac{x-1}{x}$ C $\dfrac{x+1}{x}$ D $\dfrac{x}{x-1}$ E $\dfrac{x}{x+1}$

☐ **M17** Pour tout choix du nombre réel x différent de 1 et -1, la quantité $\dfrac{x^2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}$ est égale à :

- A aucune des autres réponses proposées
- B $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)}$
- C $\dfrac{x^2-x-1}{(x+1)^2}$
- D $\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)(x-1)}$
- E $\dfrac{x^2-x-1}{(x+1)^2(x-1)}$

☐ **M18** Soit x un réel strictement positif. La quantité

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}$$

est alors égale à :

A $\dfrac{2x+1}{x+1}$ B aucune des autres réponses proposées C x D $\dfrac{3x+2}{2x+1}$ E $\dfrac{2x+1}{3x+2}$

Dans les questions **M19** et **M20**, on considère la fonction f associant à tout réel x différent de 1, 2 et 3 le réel

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

☐ **M19** On suppose disposer d'un a, nombre réel ou valant $+\infty$, tel que $f(x)$ tende vers 0 quand x tend vers a. Alors :

- A $a = 0$
- B $a = 2$
- C $a = +\infty$
- D on ne peut pas donner précisément la valeur de a
- E un tel a n'existe pas

☐ **M20** On admet qu'il existe des constantes α, β et γ vérifiant l'égalité $f(x) = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x-2} + \dfrac{\gamma}{x-3}$ pour tout réel x en lequel f est définie. La somme $\alpha+\beta+\gamma$ vaut alors :

A 0 B 6 C 1 D -6 E -1

☐ **M21** Pour tout choix des nombres réels x, y, et z, la valeur de

$$M = x^2y + y^2x + y^2z + xz^2 + yz^2 + zx^2 - (x+y+z)(xy+yz+zx)$$

est :

[A] aucune des autres réponses proposées [B] $3xyz$ [C] 0 [D] $-xyz$ [E] $-3xyz$

☐ **M22** Le nombre d'entiers *relatifs* x vérifiant $9^{(x^2)} = 3^{x+1}$ est :

[A] au moins égal à 4 [B] 1 [C] 2 [D] 0 [E] 3

☐ **M23** On dispose de deux entiers relatifs x et y tels que l'on ait les égalités $4^x = 8 \times 2^{x+y}$ et $9^{x+y} = 243 \times 3^{5y}$. Le produit xy est alors égal à :

[A] 10
[B] 12
[C] une autre valeur que celles proposées
[D] on ne peut pas donner la valeur précise de xy
[E] 4

Exercice 4. Encadrements

Dans tout cet exercice, on se donne deux réels x et y vérifiant les inégalités $-2 \leqslant x \leqslant 5$ et $-3 \leqslant y \leqslant 6$.

☐ **M24** Le meilleur encadrement possible pour $|x| + 2y$ est entre :

[A] 0 et 8 [B] -4 et 17 [C] -6 et 17 [D] aucune des autres réponses [E] -8 et 17

☐ **M25** Le meilleur encadrement possible pour $3y - 2x$ est entre :

[A] -1 et 1 [B] -13 et 27 [C] -19 et 22 [D] -5 et 8 [E] -18 et 23

☐ **M26** Le meilleur encadrement possible pour $\dfrac{2x+6}{y+8}$ est entre :

[A] $\frac{1}{7}$ et $\frac{16}{5}$ [B] $\frac{1}{6}$ et $\frac{12}{7}$ [C] $\frac{2}{5}$ et $\frac{8}{7}$ [D] $\frac{2}{13}$ et $\frac{16}{7}$ [E] -2 et 6

△ **L5** Donner le meilleur encadrement possible pour $x^2 + y^2$.

Dans la dernière partie de cet exercice, on s'intéresse au meilleur encadrement possible pour la quantité

$$z = x^2 - 2xy + 3y^2.$$

◯ **R2** Démontrer que la plus petite valeur possible pour z est 0. On suggère pour cela de trouver deux constantes a et b telles que z se réécrive $(x - ay)^2 + by^2$.

☐ **M27** On fixe y dans $[-3; 6]$. On considère la fonction g qui à x dans $[-2; 5]$ associe $g(x) = x^2 - 2xy + 3y^2$. La fonction g prend sa valeur maximale :

- A en un point de $]-2; 5[$, pour au moins une valeur de y
- B en $x = -2$, quel que soit le choix de y
- C en $x = -2$ ou $x = 5$, selon le choix de y
- D en $x = 5$, quel que soit le choix de y

☐ **M28** La valeur maximale prise par z est :

A 82 B aucune des autres valeurs proposées C 19 D 136 E 73

◯ **R3** Justifier la réponse à la question **M28**, en considérant comme acquis le résultat de la question **M27** (qu'on ne justifiera donc pas).

Exercice 5. Équations et inégalités

☐ **M29** Les solutions réelles de $x^4 - x^2 - 2 = 0$ sont au nombre de :

A 2 B 3 C 0 D 1 E 4

☐ **M30** Le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{1}{x^2} = 5\,|x|$ d'inconnue réelle est :

A 2 B 1 C infini D fini et strictement supérieur à 2 E 0

☐ **M31** L'ensemble des nombres réels $x \geqslant 0$ vérifiant $x^4 - 3x^2 + 1 > -1$ est :

- A $[0; 1[\cup [\sqrt{2}; +\infty[$
- B aucune des autres solutions proposées
- C $[0; 2]$
- D $]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$
- E $[0; 1[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$

☐ **M32** On s'intéresse aux constantes C telles que, pour tout élément x de $[-1, 1]$, on ait $x^2(1 - x^2) \leqslant C$. La plus petite valeur possible pour une telle constante C est :

A $\dfrac{1}{8}$ B $\dfrac{1}{2}$ C $\dfrac{1}{4}$ D 1 E aucune des autres réponses proposées

△ **L6** Donner le domaine de définition D de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln\left(\left|x^2 - \frac{1}{4}\right|\right)}{\sqrt{3 - x^2}}$.

☐ **M33** Pour un réel a, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = x^2 - 2ax + 3a - 2$. L'ensemble des réels a pour lesquels f_a s'annule en exactement deux points est :

A $[1; 2]$ B $]1; 2[$ C aucune des autres réponses proposées D vide E $]-2; 1[$

☐ **M34** Le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x - 3$ est :

A 3 B 1 C 2 D 0 E 4

◯ **R4** Justifier votre réponse à la question **M34**.

Exercice 6. Limites, dérivées

☐ **M35** La limite de $e^x - e^{-2x}$ quand x tend vers $-\infty$:

A est une limite finie non nulle B est 0 C n'existe pas D est $-\infty$ E est $+\infty$

☐ **M36** La limite de $\ln(2x + 1) - \ln(5x + 2)$ quand x tend vers $+\infty$:

A est $-\infty$ B est une limite finie non nulle C n'existe pas D est $+\infty$ E est 0

☐ **M37** Le signe de $x - \ln(1 + x)$ quand le nombre réel x varie dans l'intervalle $[0; +\infty[$:

A est négatif B varie selon la valeur de x C est positif

△ **L7** Donner la dérivée de la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

☐ **M38** Quand le nombre réel x varie dans l'intervalle $[0; +\infty[$, le signe de $\ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$:

A varie selon la valeur de x B est positif C est négatif

☐ **M39** Soit a, b, c, d des nombres réels, avec $c \neq 0$. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ pour tout réel x tel que $cx + d \neq 0$. La fonction dérivée de f associe alors systématiquement à x le réel :

A $\dfrac{ab + cd}{(cx + d)^2}$ B $\dfrac{ac - bd}{(cx + d)^2}$ C $\dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ D $\dfrac{ab - cd}{(cx + d)^2}$ E $\dfrac{ad + bc}{(cx + d)^2}$

☐ **M40** La dérivée de la fonction qui à x associe $x^3 e^{-2x}$ est la fonction qui à x associe :

A $(3x^2 - 2x^3)\, e^{2x}$ B $-3x^2 e^{-2x}$ C $-2x^3 e^{-2x}$ D $(-3x^2 + 2x^3)\, e^{-2x}$ E $(3x^2 - 2x^3)\, e^{-2x}$

☐ **M41** La dérivée de la fonction qui à x associe $\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$ est la fonction qui à x associe :

[A] $\dfrac{2x^2-6x}{(x^2+3)^2}$ [B] $\dfrac{2x^2+6x}{(x^2+3)^2}$ [C] $\dfrac{-4x}{(x^2+3)^2}$ [D] $\dfrac{2}{(x^2+3)^2}$ [E] $\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$

☐ **M42** La dérivée de la fonction qui à x associe $\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}$ est la fonction qui à x associe :

[A] $\dfrac{2e^{2x}+6e^x}{(e^{2x}+3)^2}$

[B] $\dfrac{8e^{2x}}{(e^{2x}+3)^2}$

[C] $\dfrac{4e^x}{(e^{2x}+3)^2}$

[D] $\dfrac{2}{(e^{2x}+3)^2}$

[E] aucune des autres réponses proposées

☐ **M43** La dérivée de la fonction qui à x associe $(e^{-x}+x)^3$ est la fonction qui à x associe :

[A] $(e^{-x}+x)^2$

[B] $3\,(1+e^{-x})\,(e^{-x}+x)^2$

[C] $3\,(e^{-x}+x)^2$

[D] $3\,(1-e^{-x})\,(e^{-x}+x)^2$

[E] aucune des autres réponses proposées

☐ **M44** La limite de $\dfrac{e^x-1-x}{x}$ quand x tend vers 0 :

[A] n'existe pas [B] est $-\infty$ [C] est une limite finie non nulle [D] est 0 [E] est $+\infty$

☐ **M45** La limite de $\dfrac{e^{2x}-1-x}{x}$ quand x tend vers 0 :

[A] est une limite finie non nulle [B] est $-\infty$ [C] est 0 [D] n'existe pas [E] est $+\infty$

Exercice 7. Pile ou Face

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois de suite une pièce équilibrée, et l'on note P lorsque la pièce tombe sur Pile, et F lorsqu'elle tombe sur Face. Le résultat est alors donné par une liste de n lettres P ou F. Par exemple, si $n = 4$ on note $PFPP$ pour indiquer qu'on a tiré Pile au premier lancer, puis Face au deuxième, puis Pile au troisième et au quatrième lancer.

☐ **M46** La probabilité que la suite des lancers débute par PF vaut :

A 1 B $\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{4}$ D aucune des autres réponses proposées E $\frac{3}{4}$

☐ **M47** La probabilité que le premier et le dernier lancer donnent le même résultat est :

A $\frac{1}{4}$ B 1 C $\frac{1}{2}$ D aucune des autres réponses proposées E $\frac{3}{4}$

☐ **M48** Le nombre total de listes donnant les résultats possibles de l'expérience est :

A 2^n B 2^{n-1} C $\frac{n(n+1)}{2}$ D $\frac{n(n-1)}{2}$ E $n!$

☐ **M49** La probabilité d'obtenir au moins deux Pile lors des n lancers est toujours égale à :

A $\frac{2^n-(n+1)}{2^n}$ B $\frac{2^n-n}{2^n}$ C $\frac{n}{2^n}$ D $\frac{1}{2n}$ E $\frac{(n+1)}{2^n}$

On envisage les deux événements :

A : « la liste de résultats comporte deux P *consécutifs* » ;

B : « la liste de résultats comporte deux F *consécutifs* »

ainsi que leurs négations respectives $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Par exemple, quand la liste des lancers est $FPPPF$, l'événement A est réalisé (il y a deux Pile consécutifs, aux deuxième et troisième lancers) mais B n'est pas réalisé car il n'y a pas deux Face consécutifs.

☐ **M50** Les probabilités des événements A et B :

A sont égales quelle que soit la valeur de n B peuvent être égales ou différentes, selon la valeur de n
C sont différentes quelle que soit la valeur de n

☐ **M51** Dans cette question, on suppose $n = 4$. La probabilité de $A \cap B$ vaut alors :

A 1 B $\frac{1}{8}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{16}$ E $\frac{1}{2}$

☐ **M52** On revient au cas général sur n. La probabilité de $\overline{A} \cap \overline{B}$ vaut :

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{n}{2^n}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{2^{n-1}}$ E $\frac{1}{2^n}$

☐ **M53** On revient au cas $n = 4$. La probabilité de A vaut alors :

$\boxed{A}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{B}$ $\frac{3}{8}$ $\boxed{C}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{D}$ $\frac{3}{4}$ $\boxed{E}$ $\frac{5}{8}$

Dans la suite, on note p_n la probabilité de A. On convient que $p_1 = 0$ et $p_0 = 0$.

☐ **M54** La probabilité de A sachant que le tirage commence par F vaut :

$\boxed{A}$ $\frac{1}{2}\,p_{n-2}$ $\boxed{B}$ $\frac{1}{2}\,p_{n-1}$ $\boxed{C}$ p_n $\boxed{D}$ p_{n-1} $\boxed{E}$ $\frac{1}{2}\,p_n$

☐ **M55** La probabilité de A sachant que le tirage commence par PF vaut :

$\boxed{A}$ p_{n-1} $\boxed{B}$ p_{n-2} $\boxed{C}$ $\frac{1}{4}\,p_{n-2}$ $\boxed{D}$ p_n $\boxed{E}$ $\frac{1}{4}\,p_{n-1}$

☐ **M56** La suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie, à partir du rang $n = 2$, la relation de récurrence :

$\boxed{A}$ $p_n = \frac{1}{2}\,p_{n-1} + \frac{1}{4}\,p_{n-2} + \frac{1}{8}$

$\boxed{B}$ $p_n = \frac{1}{4}\,p_{n-1} + \frac{1}{4}\,p_{n-2} + \frac{1}{2}$

$\boxed{C}$ $p_n = \frac{1}{2}\,p_{n-1} + \frac{1}{2}\,p_{n-2} + \frac{1}{8}$

$\boxed{D}$ $p_n = \frac{1}{4}\,p_{n-1} + \frac{1}{4}\,p_{n-2} + \frac{1}{8}$

$\boxed{E}$ $p_n = \frac{1}{2}\,p_{n-1} + \frac{1}{4}\,p_{n-2} + \frac{1}{4}$

☐ **M57** La suite de terme général $u_n = 1 - p_n$ vérifie, à partir du rang $n = 0$, la relation de récurrence :

$\boxed{A}$ $u_{n+2} = \frac{1}{2}\,u_{n+1} + \frac{1}{2}\,u_n - \frac{1}{8}$

$\boxed{B}$ $u_{n+2} = \frac{1}{4}\,u_{n+1} + \frac{1}{4}\,u_n + \frac{3}{4}$

$\boxed{C}$ $u_{n+2} = \frac{1}{2}\,u_{n+1} + \frac{1}{4}\,u_n$

$\boxed{D}$ $u_{n+2} = \frac{1}{2}\,u_{n+1} + \frac{1}{4}\,u_n + \frac{1}{8}$

$\boxed{E}$ $u_{n+2} = \frac{1}{4}\,u_{n+1} + \frac{1}{4}\,u_n$

△ **L8** On pose $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.
Donner sans justification deux réels c et d tels que $x^2 = cx + d$ et $y^2 = cy + d$.

△ **L9** Donner sans justification deux réels a et b tels que $u_0 = a + b$ et $u_1 = ax + by$.

△ **R5** Démontrer que $u_n = ax^n + by^n$ pour tout entier naturel n. On pourra tenir pour acquis tous les résultats antérieurs corrects sans en apporter de justification, et on suggère d'introduire la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \text{« } u_n = ax^n + by^n \text{ et } u_{n+1} = ax^{n+1} + by^{n+1} \text{ »}$$

☐ **M58** La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A n'a pas de limite

B converge vers 0

C converge vers $\frac{1}{2}$

D converge vers 1

E on ne peut pas conclure au vu de ce qui précède

Exercice 8. Fonctions trigonométriques

Questions variées

△ **L10** Donner un nombre réel $\alpha > 0$ tel que les solutions de l'équation $\cos(x)\cdot\sin(x) = 0$ soient les réels de la forme $k\alpha$ où $k \in \mathbb{Z}$.

☐ **M59** La dérivée de la fonction qui à x dans $\left[0; \frac{\pi}{6}\right[$ associe $\ln(\cos(3x))$ est la fonction qui à x associe :

A $-\dfrac{\sin(3x)}{3\cos(3x)}$ B $-3\,\dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$ C $\dfrac{3\sin(3x)}{\cos(3x)}$ D $-3\,\dfrac{\sin(3x)}{\cos^2(3x)}$ E $-\dfrac{\sin(3x)}{3\cos^2(3x)}$

☐ **M60** Sur l'intervalle $]0;\pi[$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$:

A est croissante puis décroissante

B est décroissante puis croissante

C est croissante

D n'est pas définie en tout point

E est décroissante

Étude d'une famille de fonctions

Soit a et b deux nombres réels. On définit une fonction $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{a,b}(x) = \cos(ax+b)\,e^{ax}.$$

☐ **M61** La dérivée de $f_{2,0}$ est la fonction qui à tout réel x associe :

A $f_{2,0}(x)$

B $\big(\cos(2x)+\sin(2x)\big)\,e^{2x}$

C $2\,\big(\cos(2x)+\sin(2x)\big)\,e^{2x}$

D $\big(\cos(2x)-\sin(2x)\big)\,e^{2x}$

E $2\,\big(\cos(2x)-\sin(2x)\big)\,e^{2x}$

☐ **M62** Soit, pour n entier naturel, $u_n = \ln\left|f_{2,0}\left(\frac{\pi}{3}+n\pi\right)\right|$. La suite de terme général $\frac{u_n}{n}$ tend alors vers :

A $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B 2π C $+\infty$ D 0 E 1

On admet la formule suivante : pour tous a et x dans $\mathbb{R}$,

$$\sin(x-a) = \cos(a)\sin(x) - \sin(a)\cos(x).$$

☐ **M63** En choisissant convenablement le nombre a dans la formule précédente, on peut voir que les solutions de l'équation $\cos(x) = \sin(x)$ sont :

A les nombres de la forme $\frac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

B les nombres de la forme $-\frac{k\pi}{3}$ où $k \in \mathbb{Z}$

C aucune des autres réponses proposées

D les nombres de la forme $\frac{k\pi}{4}$ où $k \in \mathbb{Z}$

E les nombres de la forme $\frac{k\pi}{6}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Vrai ou faux ?

On conserve les notations de la partie précédente. Dans les questions **M64** à **M69**, on demande d'évaluer la valeur logique (Vrai ou Faux) des propositions indiquées.

☐ **M64** En tout réel où la dérivée de $f_{1,0}$ s'annule, cette dérivée change de signe.

A Vrai B Faux

☐ **M65** En tout réel x où la dérivée de $f_{1,0}$ s'annule, la fonction $f_{1,0}$ a un maximum local, autrement dit on peut trouver des réels y, z tels que $y < x < z$ et $f_{1,0}(x)$ soit la plus grande valeur prise par $f_{1,0}$ sur le segment $[y;z]$.

A Faux B Vrai

☐ **M66** En l'abscisse de tout point où les courbes représentatives de la fonction $f_{1,0}$ et de la fonction $x \mapsto e^x$ se touchent, la dérivée de $f_{1,0}$ s'annule.

A Faux B Vrai

☐ **M67** Si $a \neq 0$, alors en $+\infty$ la fonction $f_{a,b}$ tend vers 0 ou $+\infty$.

A Faux B Vrai

☐ **M68** Si $a \neq 0$, alors ou bien la fonction $f_{a,b}$ tend vers 0 en $+\infty$, ou bien elle tend vers 0 en $-\infty$.

A Faux B Vrai

☐ **M69** La fonction $f_{a,b}$ est périodique si et seulement si $a = 0$.

A Vrai B Faux

Exercice 9. Distance d'un point à une courbe

On considère, dans un repère orthonormé du plan, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = -2x^2$. On considère le point A de coordonnées $(0; -1)$, et le point B de coordonnées $(0; 1)$.

☐ **M70** Soit b et c deux nombres réels. La plus petite valeur prise par $x^2 + bx + c$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$ est systématiquement :

- A $\dfrac{-4c + b^2}{4}$
- B $\dfrac{4c - b^2}{2}$
- C aucune des autres expressions proposées
- D $\dfrac{4c - b^2}{4}$
- E $2c - b^2$

On note d la plus courte distance de A à un point de $\mathcal{C}$.

☐ **M71** Que vaut d ?

A $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ B $\dfrac{\sqrt{11}}{5}$ C $\dfrac{2}{3}$ D 1 E $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

On considère maintenant un point M_0 de $\mathcal{C}$ à distance d de A, et on considère la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point M_0.

☐ **M72** Le point d'intersection de Δ avec l'axe des ordonnées a pour ordonnée :

A cela dépend du choix de M_0 B 0 C $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ D $\dfrac{3}{2}$ E $\dfrac{3}{4}$

☐ **M73** Le point d'intersection de Δ avec l'axe des abscisses a pour abscisse :

A 0 B $\dfrac{3}{4}$ C cela dépend du choix de M_0 D $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ E $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

☐ **M74** La plus courte distance de B à un point de $\mathcal{C}$ vaut :

A aucune des autres valeurs proposées B $\dfrac{3}{4}$ C 1 D $\dfrac{3}{2}$ E $\dfrac{1}{2}$