J. 24 1222

Nom et Prénom :

Code Sujet : ◯ ◯ ◯

A B C D E F G H K L M N P R S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

◯ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option B ◯

R1 On note r la raison de u ; s celle de v. Alors $\rho := \frac{s}{r}$ est défini et $\neq 1$

Ainsi $(u * v)_n = u_0 v_0 (r^n + r^{n-1}s + \cdots + r s^{n-1} + s^n)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$= u_0 v_0 r^n (1 + \rho + \cdots + \rho^{n-1} + \rho^n)$$

$$= u_0 v_0 r^n \frac{\rho^{n+1}-1}{\rho-1} = \left(\frac{u_0 v_0}{r-s} r\right) . r^n + \left(\frac{u_0 v_0 s}{s-r}\right) s^n .$$

Ainsi $u * v$ est somme de deux suites géométriques

R2 Montrons qu'il existe une <u>unique</u> suite réelle u telle que $u * b = c$, ce qui est bien la proposition correcte la plus précise.

Pour une suite u réelle, la condition $u * b = c$ se traduit par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{c_0}{b_0} \\ \forall n \geq 1, \ u_n = \left(-\dfrac{b_1}{b_0}\right) u_{n-1} + \left(-\dfrac{b_2}{b_0}\right) u_{n-2} + \cdots + \left(-\dfrac{b_n}{b_0}\right) u_0 + \dfrac{c_n}{b_0} \end{cases} \quad \text{car } b_0 \neq 0.$$

Ces conditions déterminent bien, de proche en proche, une unique suite (construction de suite par récurrence).

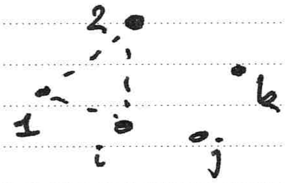
R3 Prenons un majorant M de Δu.

Pour tout $n \geq 0$ on trouve alors $u_{n+1} \leq u_n + M \leq u_{n-1} + 2M \leq \cdots \leq u_0 + (n+1)M$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on en déduit $\dfrac{u_{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{u_0}{n+1} + M \leq |u_0| + M$

Ainsi $\boxed{\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1} \text{ est majorée}}$. Enfin, dans le cas particulier $v = (n-1)_{n \geq 0}$, Δv est constante donc majorée, mais v n'est ni convergente, ni positive ni majorée.

R4 Supposons qu'il existe un système de Steiner T sur E_5.



La paire $\{1;2\}$ est incluse dans un unique triplet $\{1;2;i\}$ de T.

Notons j et k les éléments restants de E_5.

La paire $\{1;j\}$ est dans un unique triplet t_j de T

$\{2;k\}$ " " t_k de T

t_j n'a aucune paire commune avec $\{1;2;i\}$ et doit donc contenir k.

De même t_k contient j. Ainsi $\{j;k\}$ est inclus dans t_j et t_k, et $t_j \neq t_k$.

C'est ABSURDE ! conclusion : il n'y a pas de système de Steiner sur E_5.