TeSciA

2025

Mathématiques Expertes

Épreuve 2, Option A

15 mars 2025

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ◯ ◯ ●

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiple* sont numérotées **M1**, **M2**, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2**, etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2**, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiple. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiple !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Nombres complexes

Étude d'un quotient

Dans les questions **M1** à **M3** et **L1**, on considère le nombre complexe $Z = \dfrac{i-4}{2i}\cdot$

☐ **M1** La partie imaginaire de Z vaut :

■ 2 [B] $-\dfrac{1}{2}$ [C] aucune des autres réponses proposées [D] $\dfrac{1}{2}$ [E] -2

☐ **M2** Le module de Z vaut :

■ $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ [B] $\dfrac{5}{2}$ [C] aucune des autres réponses proposées [D] $\dfrac{17}{4}$ [E] $-\dfrac{3}{2}$

☐ **M3** Le nombre complexe Z possède un argument dans l'intervalle :

■ $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ [B] $\left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$ [C] $\left]\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$ [D] aucune des autres réponses proposées [E] $\left]\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right[$

△ **L1** Donner l'entier k compris entre -4 et 3 tel que Z possède un argument dans $\left[\dfrac{k\pi}{4}; \dfrac{(k+1)\pi}{4}\right[$.

Questions diverses

☐ **M4** On considère les nombres complexes

$$A = (2-i)^3, \quad B = \frac{-18+26i}{-2+2i} \quad \text{et} \quad C = \frac{4}{1+i} + \frac{9}{i}\cdot$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

[A] $A = B$ et $B \neq C$
[B] $A = B = C$
■ $A = C$ et $A \neq B$
[D] $A \neq B$, $A \neq C$ et $B \neq C$
[E] $B = C$ et $A \neq B$

☐ **M5** Le nombre de solutions complexes de l'équation $z^5 - z^2 = 0$ est :

[A] 2 [B] 1 [C] 3 [D] 5 ■ 4

Questions d'arguments

Dans les questions **M6** à **M8**, on considère le nombre complexe $A = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

☐ **M6** Un argument de A est :

■ $\dfrac{7\pi}{12}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{5\pi}{12}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{12}$ $\boxed{\text{D}}$ $-\dfrac{\pi}{12}$ $\boxed{\text{E}}$ aucune des autres réponses proposées

☐ **M7** On choisit un argument θ de A. Le nombre $\cos(\theta)$ vaut alors :

■ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\boxed{\text{B}}$ $1-\sqrt{3}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

☐ **M8** Les entiers naturels n tels que A^n soit un entier relatif sont :

$\boxed{\text{A}}$ les multiples de 48
$\boxed{\text{B}}$ aucune des autres réponses proposées
■ les multiples de 12
$\boxed{\text{D}}$ les multiples de 6
$\boxed{\text{E}}$ les multiples de 24

◯ **R1** Justifier votre réponse à la question **M8**.

Exercice 2. Différence symétrique d'ensembles

Pour deux ensembles A_1 et A_2, on note $A_1 \Delta A_2$ l'ensemble formé des objets x qui appartiennent à A_1 mais pas à A_2 et des objets x qui appartiennent à A_2 mais pas à A_1. On dit que $A_1 \Delta A_2$ est la **différence symétrique** de A_1 et A_2 (dans cet ordre).

Par exemple :

- pour $A_1 = \{1; 2; 4\}$ et $A_2 = \{1; 2; 3\}$, on a $A_1 \Delta A_2 = \{3; 4\}$;
- pour l'ensemble B formé des élèves Léa, Paul et Séverine, et l'ensemble C formé des élèves Paul et Mathilde, l'ensemble $B \Delta C$ est formé des élèves Léa, Mathilde et Séverine, autrement dit $B \Delta C = \{\text{Léa}, \text{Mathilde}, \text{Séverine}\}$.

On rappelle aussi que $A_1 \cap A_2$ désigne l'ensemble des objets qui appartiennent à la fois à A_1 et à A_2. Dans le premier exemple ci-dessus, on a donc $A_1 \cap A_2 = \{1; 2\}$, et dans le deuxième $B \cap C = \{\text{Paul}\}$.

On note $\emptyset$ l'ensemble vide.

Propriétés élémentaires de la différence symétrique

△ **L2** Donner la différence symétrique des ensembles $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{Z}$.

☐ **M9** Vrai ou faux ? On a $A\Delta B = B\Delta A$ quels que soient les ensembles A et B.

A Cette affirmation n'a pas de sens B Faux ■ Vrai

☐ **M10** Pour tout ensemble A, la différence symétrique $A\Delta A$ est égale à :

A A ■ $\emptyset$ C aucune des autres réponses

☐ **M11** Pour tout ensemble A, la différence symétrique $A\Delta\emptyset$ est égale à :

A aucune des autres réponses ■ A C $\emptyset$

☐ **M12** Pour tout ensemble A, l'ensemble $(A\Delta A)\Delta A$ est égal à :

A $\emptyset$ ■ A C aucune des autres réponses

☐ **M13** Pour deux ensembles A et B, une condition équivalente au fait que $A\Delta B$ soit vide est :

A aucune des autres réponses
B A est vide
■ $A = B$
D A et B sont vides
E B est vide

☐ **M14** Pour deux ensembles A et B, si tout élément de $A\Delta B$ est élément de A alors on peut affirmer que :

A aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue
B B est vide
■ tout élément de B est élément de A
D tout élément de A est élément de B
E $A\Delta B$ est vide

☐ **M15** Pour deux ensembles A et B, si $A\Delta B$ possède exactement un élément alors on peut affirmer que :

A A est vide

■ ou bien tout élément de A est élément de B, ou bien tout élément de B est élément de A

C aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue

D B est vide

E tout élément de A est élément de B

◯ **R2** Justifier votre réponse à la question **M15**.

☐ **M16** Soit A et B deux ensembles. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

■ Il existe toujours un et un seul ensemble X tel que $A\Delta X = B$

B Il existe toujours plusieurs ensembles X tels que $A\Delta X = B$

C Il existe toujours au moins un ensemble X tel que $A\Delta X = B$, mais il peut n'en exister qu'un seul ou plusieurs, selon le choix de A et B

D Il peut ne pas exister d'ensemble X tel que $A\Delta X = B$, selon le choix de A et B

☐ **M17** On introduit deux égalités qui peuvent être vraies ou non :

(i) $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.

(ii) $(A \cap B)\Delta C = (A\Delta C) \cap (B\Delta C)$.

Lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A, B et C ?

■ (i) mais pas (ii) B aucune des deux C (ii) mais pas (i) D les deux

Différence symétrique et finitude

Pour un ensemble fini A, on note $c(A)$ le nombre de ses éléments (aussi appelé son cardinal).

☐ **M18** On introduit trois implications, qui peuvent être vraies ou non :

(i) Si A et B sont finis alors $A\Delta B$ est fini.

(ii) Si $A\Delta B$ est fini alors A et B sont finis.

(iii) Si $A\Delta B$ et A sont finis alors B est fini.

Parmi ces implications, lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A et B ?

A toutes sauf (iii) ■ toutes sauf (ii) C les trois D une seule E toutes sauf (i)

☐ **M19** Soit A et B deux ensembles finis tels que $A\Delta B$ soit fini. Le nombre $c(A\Delta B)$ vaut alors systématiquement :

[redacted] $c(A) + c(B) - 2\,c(A \cap B)$

B $c(A) + c(B) - c(A \cap B)$

C $c(A) + c(B)$

D $\dfrac{c(A)\,c(B)}{c(A \cap B)}$

E aucune des autres valeurs proposées, en général

☐ **M20** Quels que soient les ensembles finis A et B tels que $A\Delta B$ soit fini et $c(B)$ soit impair :

A $c(A\Delta B)$ est pair

B $c(A\Delta B)$ est impair

[redacted] $c(A\Delta B)$ n'a pas la même parité que $c(A)$

D $c(A\Delta B)$ a la même parité que $c(A)$

E on ne peut pas statuer sur la parité de $c(A\Delta B)$, même en connaissant celle de $c(A)$

Différence symétrique itérée

☐ **M21** Soit A_1, A_2 et A_3 des ensembles. Pour un objet x, on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1; 2; 3\}$ tels que x appartienne à A_i. L'appartenance de x à $(A_1\Delta A_2)\Delta A_3$ est alors équivalente à la condition :

A aucune des autres réponses proposées, en général

B $n(x) = 1$

C $n(x)$ est pair

[redacted] $n(x)$ est impair

E $n(x) = 2$

◯ **R3** En utilisant le résultat de la question **M21**, et en le combinant éventuellement avec d'autres résultats antérieurs (dont on citera alors les numéros de questions), démontrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ quels que soient les ensembles A, B et C.

Le résultat de **R3** permet de définir sans ambiguïté $A_1\Delta\cdots\Delta A_n$ pour n'importe quelle liste d'ensembles $(A_1, \ldots, A_n)$, sans tenir compte de l'ordre de parenthésage. Par exemple $A_1\Delta A_2\Delta A_3\Delta A_4$ peut être défini comme $(((A_1\Delta A_2)\Delta A_3)\Delta A_4$

mais aussi comme $A_1\Delta((A_2\Delta A_3)\Delta A_4)$, ce qui fournit le même résultat.

☐ **M22** On note $A_i = \{1; i\}$ pour tout entier naturel $i \geqslant 1$. L'ensemble $A_1\Delta \cdots \Delta A_{2025}$ est alors égal à :

- [A] $\{0; 2; \ldots; 2025\}$
- [B] $\emptyset$
- [C] aucune des autres réponses proposées
- [D] $\{0; 1; 2; \ldots; 2025\}$
- ■ $\{1; 2; \ldots; 2025\}$

☐ **M23** Soit $A_1, \ldots, A_p$ des ensembles, où $p \geqslant 4$. Pour un objet x, on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1; 2; \ldots; p\}$ tels que x appartienne à A_i. L'appartenance de x à $A_1\Delta \cdots \Delta A_p$ est alors équivalente à la condition :

- [A] aucune des autres réponses proposées, en général
- ■ $n(x)$ est impair
- [C] $n(x)$ a la même parité que p
- [D] $n(x) = 1$
- [E] $n(x) = p - 1$

Classes stables

On appelle **classe** tout ensemble fini non vide dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles finis. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{C} = \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3; 5\}; \emptyset\}$ est une classe, ses éléments sont $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 3; 5\}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ (tous finis). Dans ce qui suit, les classes sont systématiquement représentées par des majuscules calligraphiées, par exemple $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, et leurs éléments sont représentés par des majuscules d'imprimerie, par exemple A, B, C.

Une classe $\mathcal{C}$ est dite **stable** lorsque, quels que soient les éléments A et B de $\mathcal{C}$, l'objet $A\Delta B$ est un élément de $\mathcal{C}$.

Par exemple, la classe $\{\{1; 2; 3\}; \{1; 2; 4\}\}$ n'est pas stable car $\{1; 2; 3\}\Delta\{1; 2; 4\}$, qui vaut $\{3; 4\}$, n'en est pas un élément.

☐ **M24** Parmi les ensembles suivants, combien sont des classes stables ?
$\mathcal{A} = \{\{1; 2; 3\}, \emptyset\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{C} = \{\{1; 2; 3\}\}$, $\mathcal{D} = \emptyset$.

[A] aucun   [B] quatre   ■ deux   [D] un   [E] trois

On rappelle que pour un ensemble A, un **sous-ensemble** de A est un ensemble B tel que tout élément de B soit élément de A. Par exemple, $\emptyset$ et A sont des sous-ensembles de A.

☐ **M25** Pour un ensemble fini X, l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de X :

■ est toujours une classe stable

B est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable

C n'est pas toujours une classe

☐ **M26** Soit X un ensemble fini et Y un sous-ensemble de X. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des sous-ensembles Z de X tels que Y soit un sous-ensemble de Z. Alors $\mathcal{C}$:

A est toujours une classe stable

B n'est pas toujours une classe

■ est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable

☐ **M27** Soit X un ensemble fini. On considère :

- L'ensemble $\mathcal{C}$ formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre pair d'éléments.
- L'ensemble $\mathcal{D}$ formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre impair d'éléments.

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de X ?

A $\mathcal{D}$ ■ $\mathcal{C}$ C aucun d'entre eux D $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$

☐ **M28** Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux classes stables. On considère la différence symétrique $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$ et l'intersection $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$. Lesquelles sont des classes stables quel que soit le choix de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$?

A aucune d'entre elles ■ $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ C $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$ D $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$

☐ **M29** Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux classes stables. On considère les ensembles suivants :

- L'ensemble $\mathcal{E}$ constitué de toutes les différences symétriques $C\Delta D$, avec C élément de $\mathcal{C}$ et D élément de $\mathcal{D}$.
- L'ensemble $\mathcal{F}$ constitué de toutes les intersections $C\cap D$, avec C élément de $\mathcal{C}$ et D élément de $\mathcal{D}$.

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$?

A $\mathcal{F}$ B $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ C aucun d'entre eux ■ $\mathcal{E}$

Exercice 3. Arithmétique

△ **L3** Donner la liste des nombres premiers compris entre 91 et 100 au sens large.

☐ **M30** Dans l'algorithme d'Euclide de recherche du pgcd, on compte une étape pour chaque division euclidienne effectuée jusqu'à trouver un reste nul. Par exemple, l'algorithme d'Euclide se fait en 2 étapes pour calculer le pgcd de 6 et 4.

On veut calculer le pgcd de 1007 et 689 par l'algorithme d'Euclide. Le nombre d'étapes est alors :

[A] 1 [B] 4 ■ 3 [D] 2 [E] 5

☐ **M31** Pour tout entier naturel n non nul, le pgcd des entiers n et $n+2$ est :

[A] $n(n+2)$ [B] 1 [C] 2 ■ 1 ou 2 [E] aucune des autres réponses proposées

☐ **M32** On donne deux affirmations :

(i) Si deux carrés d'entiers naturels diffèrent d'un nombre premier, alors ce sont des carrés consécutifs.

(ii) Pour tout nombre premier impair p, il existe deux carrés consécutifs qui diffèrent de p.

Lesquelles sont vraies ?

■ Les deux [B] Aucune des deux [C] (i) [D] (ii)

☐ **M33** Le nombre de diviseurs positifs de l'entier $2^6 \times 3^2 \times 5^3$ est :

[A] 14 [B] 11 [C] 36 ■ 84 [E] aucune des autres réponses proposées

☐ **M34** Pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, le pgcd des coefficients binomiaux $\binom{6n+3}{2}$ et $\binom{6n+3}{3}$ est :

[A] $(6n+3)(3n+1)$

[B] $2n+1$

[C] $6n+3$

[D] aucune des autres réponses proposées

■ $(2n+1)(3n+1)$

☐ **M35** Le nombre d'entiers naturels n tels que $n+3$ divise $2n^2-5n+1$ est :

[A] 3 ■ 2 [C] 1 [D] 0 [E] 4

☐ **M36** On s'intéresse à l'ensemble A formé des nombres de la forme $20\,a + 63\,b$ où a parcourt les entiers de 1 à 63, et b parcourt les entiers de 1 à 20. Trois élèves inspectent le problème puis proposent une conjecture :

- Caroline dit que A contient exactement 1260 éléments.
- Olivier dit que A contient tous les entiers de 83 à 4369.
- Anne dit que A contient exactement 83 éléments.

Qui a raison ?

■ Caroline [B] Anne [C] Aucun d'entre eux [D] Olivier

◯ **R4** Justifier votre réponse à la question **M36**.

☐ **M37** Le nombre de couples $(a; b)$ d'entiers premiers entre eux, compris entre 1 et 50 et tels que 7 divise $a^2 + b^2$ est :

[A] 7 [B] 4×49 ■ 0 [D] 49 [E] 4

☐ **M38** Le nombre d'entiers naturels n tels que $1 \leqslant n \leqslant 30$ et 7 divise $3^{2n} + 5^n$ est :

[A] 12 [B] 20 [C] 16 [D] 14 ■ 15

☐ **M39** Soit p et q deux nombres premiers distincts. Le produit de tous les diviseurs positifs de $p^5\,q^6$ vaut :

[A] $p^{15}q^{21}$

[B] aucune des autres réponses proposées

■ $p^{105}q^{126}$

[D] $p^{90}q^{105}$

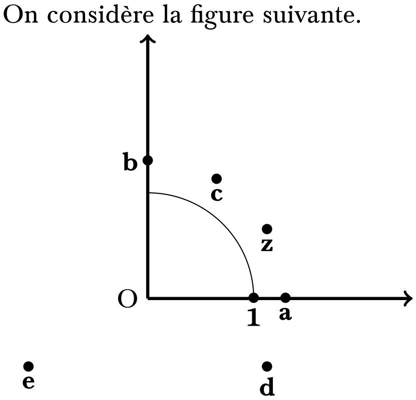
[E] $p^{30}q^{30}$

Exercice 4. Nombres complexes et géométrie

Dans tout l'exercice on se place dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, et on repère chaque point de $\mathcal{P}$ par son affixe. Dans les figures, on représente le point de $\mathcal{P}$ d'affixe 1 par le caractère **1**.

Sur une figure

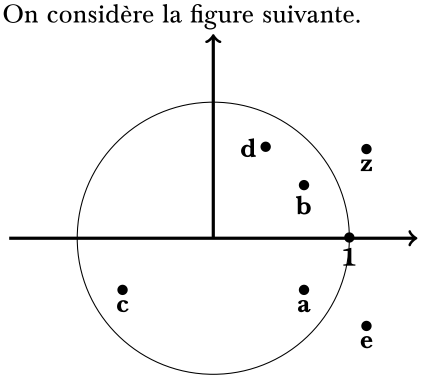
☐ **M40** On considère la figure suivante.



Sachant que le point d'affixe z est repéré sur la figure ci-contre par la lettre **z**, le point d'affixe $i\,\bar{z}$ est repéré par la lettre :

$\boxed{\text{A}}$ **e** $\boxed{\text{B}}$ **b** $\boxed{\text{C}}$ **a** $\boxed{\text{D}}$ **d** ■ **c**

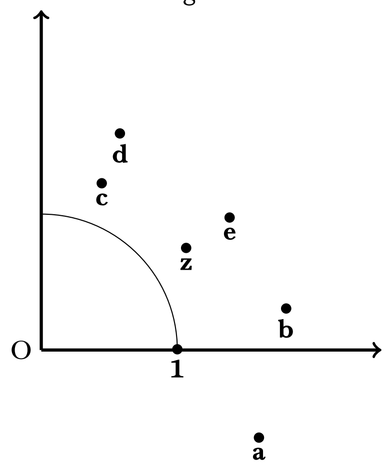
☐ **M41** On considère la figure suivante.



Sachant que le point d'affixe z est repéré sur la figure ci-contre par la lettre **z**, le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$ est repéré par la lettre :

$\boxed{\text{A}}$ **c** $\boxed{\text{B}}$ **e** $\boxed{\text{C}}$ **d** ■ **a** $\boxed{\text{E}}$ **b**

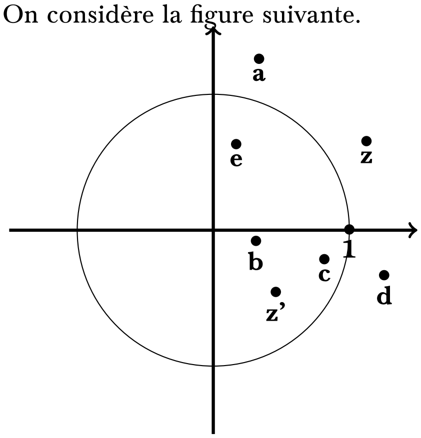
☐ **M42** On considère la figure suivante.



Sachant que le point d'affixe z est repéré sur la figure ci-contre par la lettre **z**, le point d'affixe z^2 est repéré par la lettre :

$\boxed{\text{A}}$ **a** $\boxed{\text{B}}$ **e** $\boxed{\text{C}}$ **b** ■ **d** $\boxed{\text{E}}$ **c**

☐ **M43** On considère la figure suivante.



Sachant que le point d'affixe z (respectivement, z') est repéré sur la figure ci-contre par la lettre **z** (respectivement, **z'**), le point d'affixe zz' est repéré par la lettre :

■ **c** $\boxed{\text{B}}$ **b** $\boxed{\text{C}}$ **a** $\boxed{\text{D}}$ **d** $\boxed{\text{E}}$ **e**

Une application du plan complexe dans lui-même

On définit une application F comme suit : pour tout point M de $\mathcal{P}$ privé de l'origine O, on note z l'affixe de M et on prend le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, dit image de M par F et aussi noté $F(M)$. On dit aussi que M est un antécédent de M' par F.

☐ **M44** L'image par F du point d'affixe $1 + 2i$ est le point d'affixe :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$ $\boxed{\text{B}}$ $3 + 4i$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i$ ■ $\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$

□ **M45** Le point d'affixe $\frac{1}{2}$ est l'image par F :

[A] d'aucun point

■ des points d'affixes $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

[C] uniquement du point d'affixe $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$

[D] du point d'affixe $\frac{5}{4}$

[E] uniquement du point d'affixe $\frac{1-i\sqrt{3}}{4}$

△ **L4** Donner les antécédents par F du point d'affixe i.

□ **M46** On donne deux affirmations :

(i) Tout point M de $\mathcal{P}$ privé de O admet une unique image par F.

(ii) Tout point N de $\mathcal{P}$ est l'image par F d'un unique point de $\mathcal{P}$.

Parmi ces affirmations, lesquelles sont vraies ?

■ (i) mais pas (ii) [B] (ii) mais pas (i) [C] Toutes [D] Aucune

□ **M47** On donne trois affirmations :

(i) Tout point de $\mathcal{P}$ a au plus deux antécédents par F.

(ii) Tout point de $\mathcal{P}$ a au moins un antécédent par F.

(iii) Il existe au moins deux points de $\mathcal{P}$ ayant un seul antécédent par F.

Parmi ces affirmations, lesquelles sont vraies ?

[A] Une seule [B] Toutes sauf (i) [C] Toutes sauf (iii) ■ Toutes [E] Toutes sauf (ii)

□ **M48** Un point M est dit invariant par F lorsque $F(M) = M$. Le nombre de points invariants par F est alors :

[A] infini [B] 0 ■ 2 [D] 3 [E] 1

□ **M49** Lorsque M parcourt (entièrement) le cercle de centre O et de rayon 1, le point $F(M)$ parcourt (entièrement) :

[A] un cercle [B] la réunion d'un segment et d'un cercle ■ un segment [D] aucune des autres réponses proposées [E] une droite

△ **L5** Donner sans justification l'ensemble des points dont l'image par F est sur l'axe des ordonnées.

△ **R5** Déterminer, en justifiant votre réponse, l'ensemble des points dont l'image par F est sur l'axe des abscisses.

Exercice 5. Records d'une permutation

Dans tout l'exercice, on fixe un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

On appelle **permutation** de $\{1; 2; \ldots; n\}$ toute liste (ordonnée) $(i_1; \ldots; i_n)$ dans laquelle chaque entier de 1 à n est représenté exactement une fois. Pour la liste $\sigma = (i_1; \ldots; i_n)$, on écrit aussi $\sigma(k) = i_k$. Par exemple, pour $n = 4$ la liste $\sigma = (4; 3; 1; 2)$ est une permutation de $\{1; 2; 3; 4\}$ et $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 2$.

On dit qu'une permutation σ de $\{1; 2; \ldots; n\}$ présente un **record en position** i (où $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$) si $i = 1$ ou si $i > 1$ et $\sigma(i)$ est le plus grand des nombres $\sigma(1); \sigma(2); \ldots; \sigma(i)$. On note $\mathcal{R}(\sigma)$ le nombre de records de la permutation σ.

Par exemple, pour $n = 6$ et $\sigma = (4; 3; 1; 6; 2; 5)$, la permutation σ a exactement 2 records, en positions 1 et 4 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma) = 2$).

Ou encore, pour $n = 7$ et $\sigma = (2; 3; 5; 1; 4; 7; 6)$, la permutation σ a exactement 4 records, en positions 1, 2, 3 et 6 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma) = 4$).

Le cas $n = 3$

△ **L6** Donner toutes les permutations de $\{1; 2; 3\}$ ayant exactement 2 records.

Le cas $n = 4$

Dans cette partie on étudie le cas $n = 4$.

☐ **M50** Le nombre de permutations de $\{1; 2; 3; 4\}$ est :

■ 24   [B] 6   [C] 256   [D] 16   [E] aucune des autres réponses

☐ **M51** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 4$ est :

■ 1   [B] 2   [C] 11   [D] 3   [E] 6

☐ **M52** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 1$ est :

[A] 1   [B] 2   [C] 11   [D] 3   ■ 6

△ **L7** Donner les permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 3$.

☐ **M53** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 2$ est :

[A] 6   [B] 1   [C] 2   ■ 11   [E] 3

Le cas $n \geqslant 4$

☐ **M54** Le nombre de permutations de $\{1; 2; \ldots ; n\}$ est :

[A] 2^{n+1} [B] aucune des autres réponses ■ $n!$ [D] 2^n [E] n^n

☐ **M55** Le nombre de permutations de $\{1; 2; \ldots ; n\}$ ayant n records est :

■ 1 [B] n [C] 2^n [D] 2^{n-1} [E] aucune des autres réponses

☐ **M56** Le nombre de permutations de $\{1; 2; \ldots ; n\}$ n'ayant qu'un seul record est :

[A] $n+2$ [B] $\dfrac{n(n-1)}{2}$ [C] $2(n-1)$ [D] $2^{n-1}-2$ ■ $(n-1)!$

Permutations ayant $n-1$ records

☐ **M57** Pour toute permutation σ de $\{1; 2; \ldots ; n\}$ ayant exactement $n-1$ records, on a :

■ $\sigma(n-1) = n$ ou $\sigma(n) = n$

[B] $\sigma(n) = n-1$

[C] $\sigma(n) < n-1$

[D] $\sigma(n) = 1$

[E] $\sigma(n) = n$ ou $\sigma(n) = n-1$

☐ **M58** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \ldots ; n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n-1) = n$ est :

[A] 1 [B] $(n-2)!$ [C] n ■ $n-1$ [E] 0

☐ **M59** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \ldots ; n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n) = n$ et $\sigma(1) \neq 1$ est :

[A] n ■ $n-2$ [C] 0 [D] $n-1$ [E] 1

☐ **M60** Soit k un élément de $\{2; \ldots ; n-1\}$. Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \ldots ; n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n) = n$, $\sigma(1) = 1$ et n'ayant pas de record en position k est :

[A] $1+2+\cdots+(k-1)$ [B] $1+2+\cdots+(n-1)$ [C] $n-1$ [D] 1 ■ $k-2$

☐ **M61** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \ldots ; n\}$ ayant exactement $n-1$ records, et telles que $\sigma(n) = n$ et $\sigma(1) = 1$, est :

■ $\dfrac{n^2-5n+6}{2}$ [B] $n-1$ [C] $n-2$ [D] $\dfrac{n^2-3n-2}{2}$ [E] 1

△ **L8** Donner le nombre de permutations de $\{1;2;\ldots;n\}$ ayant exactement $n-1$ records.

Permutations ayant 2 records

☐ **M62** Soit p un élément de $\{2;\ldots;n\}$. Le nombre de p-listes $(k_1;k_2;\ldots;k_p)$ d'éléments distincts de $\{1;2;\cdots;n\}$ dont k_p est le plus grand élément vaut :

A $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ B n^{p-1} C $(p-1)!$ ■ $\dfrac{n!}{p\,(n-p)!}$ E $\dbinom{n}{p}$

☐ **M63** Soit p un élément de $\{2;\ldots;n\}$. Le nombre de permutations de $\{1;2;\ldots;n\}$ ayant exactement deux records, lesquels sont atteints en positions 1 et p, est :

A $\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!}$ B $\dfrac{1}{p}$ C $\dfrac{(n-1)!}{p}$ ■ $\dfrac{(n-1)!}{p-1}$ E $\dfrac{1}{p-1}$

☐ **M64** Le nombre de permutations de $\{1;2;\ldots;n\}$ ayant exactement deux records est :

A $\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

■ $(n-1)!\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}\right)$

C $(n-1)!\left(\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

D $1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{p!}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)!}$

E $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}$

Une loi de probabilité sur l'ensemble des permutations de $\{1;2;\ldots;n\}$

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1;2;\cdots;n\}$. On le munit de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$, c'est-à-dire que, pour toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$, on a $\mathbf{P}(\{\sigma\})=\dfrac{1}{n!}$.

On définit une variable aléatoire $\mathcal{R}_n$ qui à toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$ associe le nombre de records de σ.

On note, pour tout entier i de $\{1;2;\cdots;n\}$, T_i la variable aléatoire qui, à chaque permutation σ de $\mathcal{S}_n$, associe 1 si σ présente un record en position i, et 0 sinon. La variable T_1 est donc constante égale à 1.

☐ **M65** L'espérance de $\mathcal{R}_3$ est :

A $\dfrac{5}{3}$ B $\dfrac{4}{3}$ ■ $\dfrac{11}{6}$ D 2 E $\dfrac{7}{6}$

☐ **M66** La variance de $\mathcal{R}_3$ est :

A $\dfrac{19}{36}$ B $\dfrac{5}{54}$ C $\dfrac{7}{54}$ D $\dfrac{13}{36}$ ■ $\dfrac{17}{36}$

☐ **M67** Soit i un élément de $\{1; 2; \dots; n\}$. La probabilité $\mathbf{P}(T_i = 1)$ vaut alors :

■ $\dfrac{1}{i}$ B $\dfrac{1}{i+1}$ C $\dfrac{1}{i!}$ D $\dfrac{1}{(i+1)!}$ E aucune des autres réponses proposées

△ **R6** Justifier votre réponse à la question **M67**.

△ **L9** On admet que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est la somme de leurs espérances. Donner une expression simple de l'espérance de $\mathcal{R}_n$.