



2025

Mathématiques Expertes
Épreuve 2, Option A

15 mars 2025

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ○ ○ ●

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les *questions à choix multiple* sont numérotées **M1**, **M2**, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2**, etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2**, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ○ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

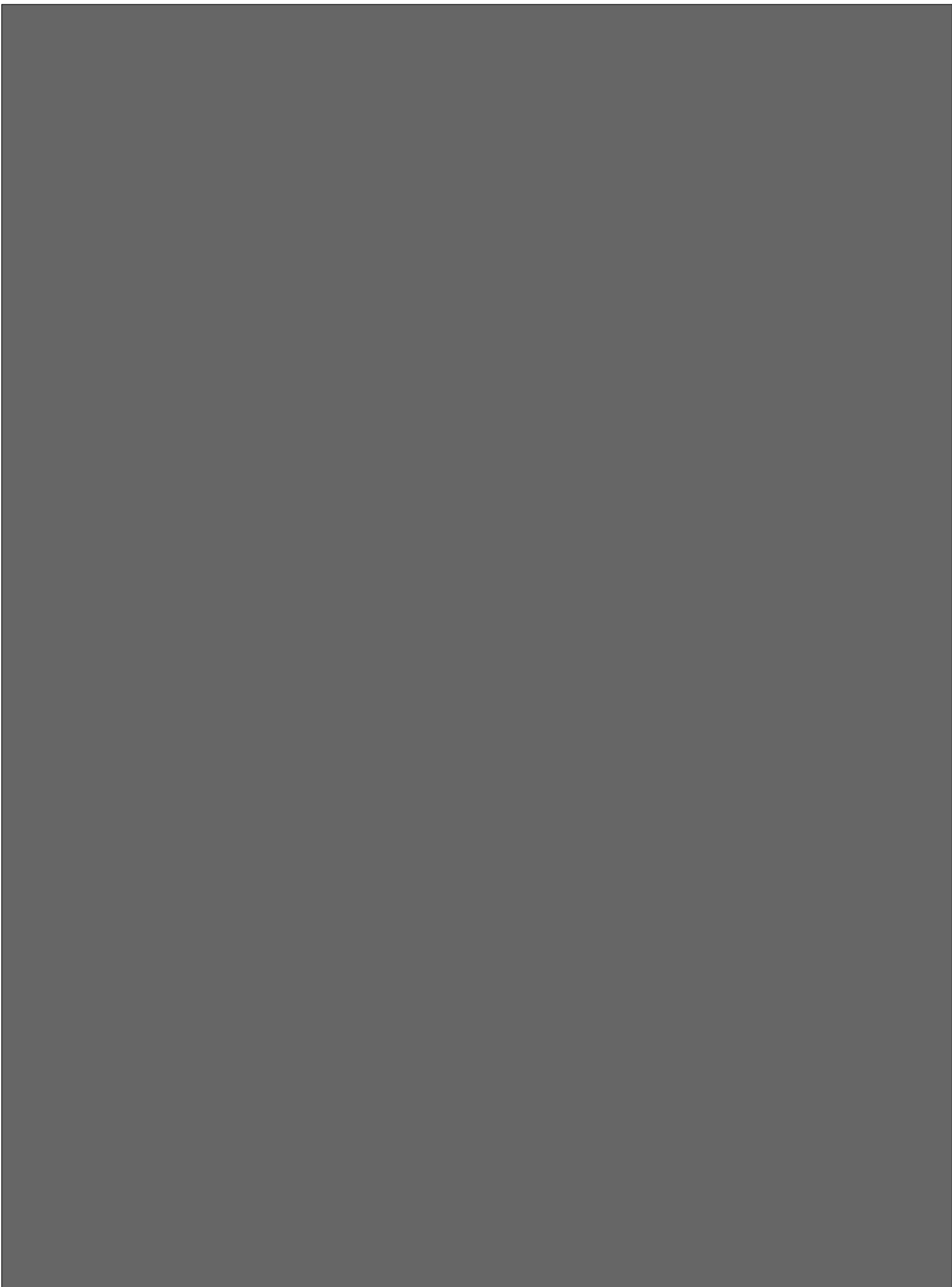
CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiple. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiple !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TeSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).

Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES



Exercice 1. Nombres complexes

Étude d'un quotient

Dans les questions **M1** à **M3** et **L1**, on considère le nombre complexe $Z = \frac{i-4}{2i}$.

M1 La partie imaginaire de Z vaut :

- A** 2 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** aucune des autres réponses proposées **D** $\frac{1}{2}$ **E** -2

M2 Le module de Z vaut :

- A** $\frac{\sqrt{17}}{2}$ **B** $\frac{5}{2}$ **C** aucune des autres réponses proposées **D** $\frac{17}{4}$ **E** $-\frac{3}{2}$

M3 Le nombre complexe Z possède un argument dans l'intervalle :

- A** $]0; \frac{\pi}{2}[$ **B** $]\frac{\pi}{2}; \pi[$ **C** $]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$ **D** aucune des autres réponses proposées
 E $]\pi; \frac{3\pi}{2}[$

L1 Donner l'entier k compris entre -4 et 3 tel que Z possède un argument dans $\left[\frac{k\pi}{4}; \frac{(k+1)\pi}{4}\right[$.

Questions diverses

M4 On considère les nombres complexes

$$A = (2 - i)^3, \quad B = \frac{-18 + 26i}{-2 + 2i} \quad \text{et} \quad C = \frac{4}{1+i} + \frac{9}{i}.$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A** $A = B$ et $B \neq C$
 B $A = B = C$
 C $A = C$ et $A \neq B$
 D $A \neq B$, $A \neq C$ et $B \neq C$
 E $B = C$ et $A \neq B$

M5 Le nombre de solutions complexes de l'équation $z^5 - z^2 = 0$ est :

- A** 2 **B** 1 **C** 3 **D** 5 **E** 4

Questions d'arguments

Dans les questions **M6** à **M8**, on considère le nombre complexe $A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.

M6 Un argument de A est :

- A** $\frac{7\pi}{12}$ **B** $\frac{5\pi}{12}$ **C** $\frac{\pi}{12}$ **D** $-\frac{\pi}{12}$ **E** aucune des autres réponses proposées

M7 On choisit un argument θ de A . Le nombre $\cos(\theta)$ vaut alors :

- A** $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ **B** $1 - \sqrt{3}$ **C** $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$ **D** $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ **E** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

M8 Les entiers naturels n tels que A^n soit un entier relatif sont :

- A** les multiples de 48
 B aucune des autres réponses proposées
 C les multiples de 12
 D les multiples de 6
 E les multiples de 24

R1 Justifier votre réponse à la question **M8**.

Exercice 2. Différence symétrique d'ensembles

Pour deux ensembles A_1 et A_2 , on note $A_1 \Delta A_2$ l'ensemble formé des objets x qui appartiennent à A_1 mais pas à A_2 et des objets x qui appartiennent à A_2 mais pas à A_1 . On dit que $A_1 \Delta A_2$ est la **différence symétrique** de A_1 et A_2 (dans cet ordre).

Par exemple :

- pour $A_1 = \{1; 2; 4\}$ et $A_2 = \{1; 2; 3\}$, on a $A_1 \Delta A_2 = \{3; 4\}$;
- pour l'ensemble B formé des élèves Léa, Paul et Séverine, et l'ensemble C formé des élèves Paul et Mathilde, l'ensemble $B \Delta C$ est formé des élèves Léa, Mathilde et Séverine, autrement dit $B \Delta C = \{\text{Léa, Mathilde, Séverine}\}$.

On rappelle aussi que $A_1 \cap A_2$ désigne l'ensemble des objets qui appartiennent à la fois à A_1 et à A_2 . Dans le premier exemple ci-dessus, on a donc $A_1 \cap A_2 = \{1; 2\}$, et dans le deuxième $B \cap C = \{\text{Paul}\}$.

On note \emptyset l'ensemble vide.

Propriétés élémentaires de la différence symétrique

L2 Donner la différence symétrique des ensembles \mathbb{R}_- et \mathbb{Z} .

M9 Vrai ou faux? On a $A \Delta B = B \Delta A$ quels que soient les ensembles A et B .

- A** Cette affirmation n'a pas de sens **B** Faux **C** Vrai

M10 Pour tout ensemble A , la différence symétrique $A\Delta A$ est égale à :

- A** A **B** \emptyset **C** aucune des autres réponses

M11 Pour tout ensemble A , la différence symétrique $A\Delta\emptyset$ est égale à :

- A** aucune des autres réponses **B** A **C** \emptyset

M12 Pour tout ensemble A , l'ensemble $(A\Delta A)\Delta A$ est égal à :

- A** \emptyset **B** A **C** aucune des autres réponses

M13 Pour deux ensembles A et B , une condition équivalente au fait que $A\Delta B$ soit vide est :

- A** aucune des autres réponses
 B A est vide
 C $A = B$
 D A et B sont vides
 E B est vide

M14 Pour deux ensembles A et B , si tout élément de $A\Delta B$ est élément de A alors on peut affirmer que :

- A** aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue
 B B est vide
 C tout élément de B est élément de A
 D tout élément de A est élément de B
 E $A\Delta B$ est vide

M15 Pour deux ensembles A et B , si $A\Delta B$ possède exactement un élément alors on peut affirmer que :

- A** A est vide
 B ou bien tout élément de A est élément de B , ou bien tout élément de B est élément de A
 C aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue
 D B est vide
 E tout élément de A est élément de B

R2 Justifier votre réponse à la question **M15**.

M16 Soit A et B deux ensembles. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- A** Il existe toujours un et un seul ensemble X tel que $A\Delta X = B$
 B Il existe toujours plusieurs ensembles X tels que $A\Delta X = B$
 C Il existe toujours au moins un ensemble X tel que $A\Delta X = B$, mais il peut n'en exister qu'un seul ou plusieurs, selon le choix de A et B
 D Il peut ne pas exister d'ensemble X tel que $A\Delta X = B$, selon le choix de A et B

M17 On introduit deux égalités qui peuvent être vraies ou non :

(i) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

(ii) $(A \cap B) \Delta C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$.

Lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A , B et C ?

- A** (i) mais pas (ii) **B** aucune des deux **C** (ii) mais pas (i) **D** les deux

Différence symétrique et finitude

Pour un ensemble fini A , on note $c(A)$ le nombre de ses éléments (aussi appelé son cardinal).

M18 On introduit trois implications, qui peuvent être vraies ou non :

(i) Si A et B sont finis alors $A \Delta B$ est fini.

(ii) Si $A \Delta B$ est fini alors A et B sont finis.

(iii) Si $A \Delta B$ et A sont finis alors B est fini.

Parmi ces implications, lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A et B ?

- A** toutes sauf (iii) **B** toutes sauf (ii) **C** les trois **D** une seule **E** toutes sauf (i)

M19 Soit A et B deux ensembles finis tels que $A \Delta B$ soit fini. Le nombre $c(A \Delta B)$ vaut alors systématiquement :

A $c(A) + c(B) - 2c(A \cap B)$

B $c(A) + c(B) - c(A \cap B)$

C $c(A) + c(B)$

D $\frac{c(A)c(B)}{c(A \cap B)}$

E aucune des autres valeurs proposées, en général

M20 Quels que soient les ensembles finis A et B tels que $A \Delta B$ soit fini et $c(B)$ soit impair :

A $c(A \Delta B)$ est pair

B $c(A \Delta B)$ est impair

C $c(A \Delta B)$ n'a pas la même parité que $c(A)$

D $c(A \Delta B)$ a la même parité que $c(A)$

E on ne peut pas statuer sur la parité de $c(A \Delta B)$, même en connaissant celle de $c(A)$

Différence symétrique itérée

M21 Soit A_1 , A_2 et A_3 des ensembles. Pour un objet x , on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1; 2; 3\}$ tels que x appartienne à A_i . L'appartenance de x à $(A_1 \Delta A_2) \Delta A_3$ est alors équivalente à la condition :

A aucune des autres réponses proposées, en général

B $n(x) = 1$

C $n(x)$ est pair

D $n(x)$ est impair

E $n(x) = 2$

○ **R3** En utilisant le résultat de la question **M21**, et en le combinant éventuellement avec d'autres résultats antérieurs (dont on citera alors les numéros de questions), démontrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ quels que soient les ensembles A , B et C .

Le résultat de **R3** permet de définir sans ambiguïté $A_1\Delta\cdots\Delta A_n$ pour n'importe quelle liste d'ensembles (A_1, \dots, A_n) , sans tenir compte de l'ordre de parenthésage. Par exemple $A_1\Delta A_2\Delta A_3\Delta A_4$ peut être défini comme $((A_1\Delta A_2)\Delta A_3)\Delta A_4$ mais aussi comme $A_1\Delta((A_2\Delta A_3)\Delta A_4)$, ce qui fournit le même résultat.

□ **M22** On note $A_i = \{1; i\}$ pour tout entier naturel $i \geq 1$. L'ensemble $A_1\Delta\cdots\Delta A_{2025}$ est alors égal à :

A $\{0; 2; \dots; 2025\}$

B \emptyset

C aucune des autres réponses proposées

D $\{0; 1; 2; \dots; 2025\}$

E $\{1; 2; \dots; 2025\}$

□ **M23** Soit A_1, \dots, A_p des ensembles, où $p \geq 4$. Pour un objet x , on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1; 2; \dots; p\}$ tels que x appartienne à A_i . L'appartenance de x à $A_1\Delta\cdots\Delta A_p$ est alors équivalente à la condition :

A aucune des autres réponses proposées, en général

B $n(x)$ est impair

C $n(x)$ a la même parité que p

D $n(x) = 1$

E $n(x) = p - 1$

Classes stables

On appelle **classe** tout ensemble fini non vide dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles finis. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{C} = \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3; 5\}; \emptyset\}$ est une classe, ses éléments sont $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 3; 5\}$ et l'ensemble vide \emptyset (tous finis). Dans ce qui suit, les classes sont systématiquement représentées par des majuscules calligraphiées, par exemple $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, et leurs éléments sont représentés par des majuscules d'imprimerie, par exemple A, B, C .

Une classe \mathcal{C} est dite **stable** lorsque, quels que soient les éléments A et B de \mathcal{C} , l'objet $A\Delta B$ est un élément de \mathcal{C} .

Par exemple, la classe $\{\{1; 2; 3\}; \{1; 2; 4\}\}$ n'est pas stable car $\{1; 2; 3\}\Delta\{1; 2; 4\}$, qui vaut $\{3; 4\}$, n'en est pas un élément.

□ **M24** Parmi les ensembles suivants, combien sont des classes stables ?

$\mathcal{A} = \{\{1; 2; 3\}, \emptyset\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{C} = \{\{1; 2; 3\}\}$, $\mathcal{D} = \emptyset$.

A aucun

B quatre

C deux

D un

E trois

On rappelle que pour un ensemble A , un **sous-ensemble** de A est un ensemble B tel que tout élément de B soit élément de A . Par exemple, \emptyset et A sont des sous-ensembles de A .

M25 Pour un ensemble fini X , l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de X :

- A** est toujours une classe stable
 B est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable
 C n'est pas toujours une classe

M26 Soit X un ensemble fini et Y un sous-ensemble de X . On considère l'ensemble \mathcal{C} des sous-ensembles Z de X tels que Y soit un sous-ensemble de Z . Alors \mathcal{C} :

- A** est toujours une classe stable
 B n'est pas toujours une classe
 C est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable

M27 Soit X un ensemble fini. On considère :

- L'ensemble \mathcal{C} formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre pair d'éléments.
- L'ensemble \mathcal{D} formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre impair d'éléments.

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de X ?

- A** \mathcal{D} **B** \mathcal{C} **C** aucun d'entre eux **D** \mathcal{C} et \mathcal{D}

M28 Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux classes stables. On considère la différence symétrique $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$ et l'intersection $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$. Lesquelles sont des classes stables quel que soit le choix de \mathcal{C} et \mathcal{D} ?

- A** aucune d'entre elles **B** $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ **C** $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$ **D** $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$

M29 Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux classes stables. On considère les ensembles suivants :

- L'ensemble \mathcal{E} constitué de toutes les différences symétriques $C\Delta D$, avec C élément de \mathcal{C} et D élément de \mathcal{D} .
- L'ensemble \mathcal{F} constitué de toutes les intersections $C\cap D$, avec C élément de \mathcal{C} et D élément de \mathcal{D} .

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de \mathcal{C} et \mathcal{D} ?

- A** \mathcal{F} **B** \mathcal{E} et \mathcal{F} **C** aucun d'entre eux **D** \mathcal{E}

Exercice 3. Arithmétique

△ **L3** Donner la liste des nombres premiers compris entre 91 et 100 au sens large.

□ **M30** Dans l'algorithme d'Euclide de recherche du pgcd, on compte une étape pour chaque division euclidienne effectuée jusqu'à trouver un reste nul. Par exemple, l'algorithme d'Euclide se fait en 2 étapes pour calculer le pgcd de 6 et 4.

On veut calculer le pgcd de 1007 et 689 par l'algorithme d'Euclide. Le nombre d'étapes est alors :

- A** 1 **B** 4 **C** 3 **D** 2 **E** 5

□ **M31** Pour tout entier naturel n non nul, le pgcd des entiers n et $n + 2$ est :

- A** $n(n + 2)$ **B** 1 **C** 2 **D** 1 ou 2 **E** aucune des autres réponses proposées

□ **M32** On donne deux affirmations :

- (i) Si deux carrés d'entiers naturels diffèrent d'un nombre premier, alors ce sont des carrés consécutifs.
 (ii) Pour tout nombre premier impair p , il existe deux carrés consécutifs qui diffèrent de p .

Lesquelles sont vraies ?

- A** Les deux **B** Aucune des deux **C** (i) **D** (ii)

□ **M33** Le nombre de diviseurs positifs de l'entier $2^6 \times 3^2 \times 5^3$ est :

- A** 14 **B** 11 **C** 36 **D** 84 **E** aucune des autres réponses proposées

□ **M34** Pour tout entier naturel $n \geq 10$, le pgcd des coefficients binomiaux $\binom{6n+3}{2}$ et $\binom{6n+3}{3}$ est :

- A** $(6n+3)(3n+1)$
 B $2n+1$
 C $6n+3$
 D aucune des autres réponses proposées
 E $(2n+1)(3n+1)$

□ **M35** Le nombre d'entiers naturels n tels que $n + 3$ divise $2n^2 - 5n + 1$ est :

- A** 3 **B** 2 **C** 1 **D** 0 **E** 4

M36 On s'intéresse à l'ensemble A formé des nombres de la forme $20a + 63b$ où a parcourt les entiers de 1 à 63, et b parcourt les entiers de 1 à 20. Trois élèves inspectent le problème puis proposent une conjecture :

- Caroline dit que A contient exactement 1260 éléments.
- Olivier dit que A contient tous les entiers de 83 à 4369.
- Anne dit que A contient exactement 83 éléments.

Qui a raison ?

- A** Caroline **B** Anne **C** Aucun d'entre eux **D** Olivier

R4 Justifier votre réponse à la question **M36**.

M37 Le nombre de couples $(a; b)$ d'entiers premiers entre eux, compris entre 1 et 50 et tels que 7 divise $a^2 + b^2$ est :

- A** 7 **B** 4×49 **C** 0 **D** 49 **E** 4

M38 Le nombre d'entiers naturels n tels que $1 \leq n \leq 30$ et 7 divise $3^{2n} + 5^n$ est :

- A** 12 **B** 20 **C** 16 **D** 14 **E** 15

M39 Soit p et q deux nombres premiers distincts. Le produit de tous les diviseurs positifs de $p^5 q^6$ vaut :

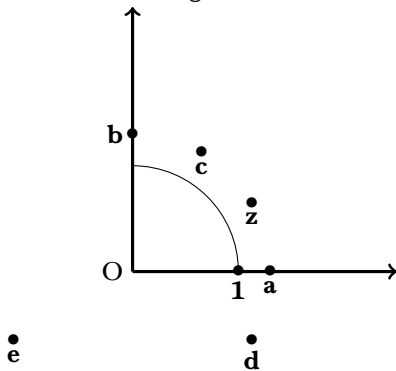
- A** $p^{15} q^{21}$
 B aucune des autres réponses proposées
 C $p^{105} q^{126}$
 D $p^{90} q^{105}$
 E $p^{30} q^{30}$
-

Exercice 4. Nombres complexes et géométrie

Dans tout l'exercice on se place dans un plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et on repère chaque point de \mathcal{P} par son affixe. Dans les figures, on représente le point de \mathcal{P} d'affixe 1 par le caractère 1.

Sur une figure

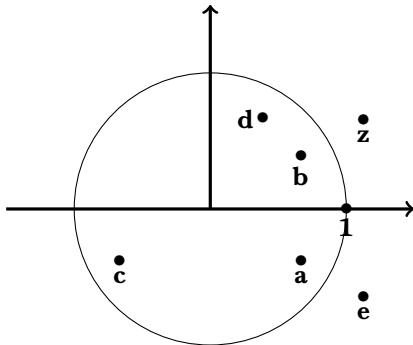
□ **M40** On considère la figure suivante.



Sachant que le point d'affixe z est repéré sur la figure ci-contre par la lettre z , le point d'affixe $i\bar{z}$ est repéré par la lettre :

- A e
 B b
 C a
 D d
 E c

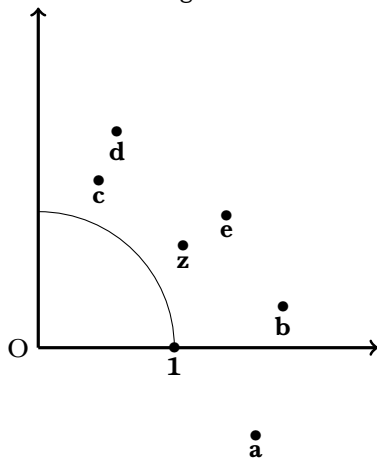
□ **M41** On considère la figure suivante.



Sachant que le point d'affixe z est repéré sur la figure ci-contre par la lettre z , le point d'affixe $\frac{1}{z}$ est repéré par la lettre :

- A c
 B e
 C d
 D a
 E b

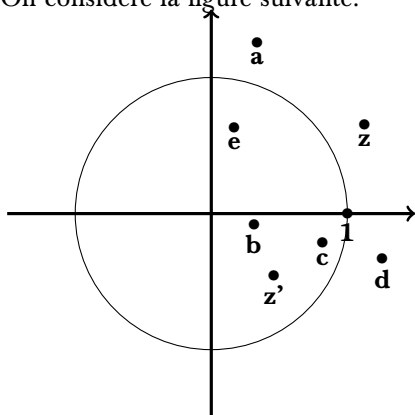
□ **M42** On considère la figure suivante.



Sachant que le point d'affixe z est repéré sur la figure ci-contre par la lettre z , le point d'affixe z^2 est repéré par la lettre :

- A a
 B e
 C b
 D d
 E c

□ **M43** On considère la figure suivante.



Sachant que le point d'affixe z (respectivement, z') est repéré sur la figure ci-contre par la lettre z (respectivement, z'), le point d'affixe zz' est repéré par la lettre :

- A c
 B b
 C a
 D d
 E e

Une application du plan complexe dans lui-même

On définit une application F comme suit : pour tout point M de \mathcal{P} privé de l'origine O , on note z l'affixe de M et on prend le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, dit image de M par F et aussi noté $F(M)$. On dit aussi que M est un antécédent de M' par F .

□ **M44** L'image par F du point d'affixe $1 + 2i$ est le point d'affixe :

- A $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$
 B $3 + 4i$
 C $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$
 D $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$
 E $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

□ **M45** Le point d'affixe $\frac{1}{2}$ est l'image par F :

- A d'aucun point
 B des points d'affixes $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$
 C uniquement du point d'affixe $\frac{1 + i\sqrt{3}}{4}$
 D du point d'affixe $\frac{5}{4}$
 E uniquement du point d'affixe $\frac{1 - i\sqrt{3}}{4}$

△ **L4** Donner les antécédents par F du point d'affixe i .

□ **M46** On donne deux affirmations :

- (i) Tout point M de \mathcal{P} privé de O admet une unique image par F .
 (ii) Tout point N de \mathcal{P} est l'image par F d'un unique point de \mathcal{P} .

Parmi ces affirmations, lesquelles sont vraies ?

- A (i) mais pas (ii)
 B (ii) mais pas (i)
 C Toutes
 D Aucune

M47 On donne trois affirmations :

- (i) Tout point de \mathcal{P} a au plus deux antécédents par F .
- (ii) Tout point de \mathcal{P} a au moins un antécédent par F .
- (iii) Il existe au moins deux points de \mathcal{P} ayant un seul antécédent par F .

Parmi ces affirmations, lesquelles sont vraies ?

- A** Une seule **B** Toutes sauf (i) **C** Toutes sauf (iii) **D** Toutes **E** Toutes sauf (ii)

M48 Un point M est dit invariant par F lorsque $F(M) = M$. Le nombre de points invariants par F est alors :

- A** infini **B** 0 **C** 2 **D** 3 **E** 1

M49 Lorsque M parcourt (entièrement) le cercle de centre O et de rayon 1, le point $F(M)$ parcourt (entièrement) :

- A** un cercle **B** la réunion d'un segment et d'un cercle **C** un segment
 D aucune des autres réponses proposées **E** une droite

L5 Donner sans justification l'ensemble des points dont l'image par F est sur l'axe des ordonnées.

R5 Déterminer, en justifiant votre réponse, l'ensemble des points dont l'image par F est sur l'axe des abscisses.

Exercice 5. Records d'une permutation

Dans tout l'exercice, on fixe un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

On appelle **permutation** de $\{1; 2; \dots; n\}$ toute liste (ordonnée) $(i_1; \dots; i_n)$ dans laquelle chaque entier de 1 à n est représenté exactement une fois. Pour la liste $\sigma = (i_1; \dots; i_n)$, on écrit aussi $\sigma(k) = i_k$. Par exemple, pour $n = 4$ la liste $\sigma = (4; 3; 1; 2)$ est une permutation de $\{1; 2; 3; 4\}$ et $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 2$.

On dit qu'une permutation σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ présente un **record en position** i (où $i \in \{1; 2; \dots; n\}$) si $i = 1$ ou si $i > 1$ et $\sigma(i)$ est le plus grand des nombres $\sigma(1); \sigma(2); \dots; \sigma(i)$. On note $\mathcal{R}(\sigma)$ le nombre de records de la permutation σ .

Par exemple, pour $n = 6$ et $\sigma = (4; 3; 1; 6; 2; 5)$, la permutation σ a exactement 2 records, en positions 1 et 4 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma) = 2$).

Ou encore, pour $n = 7$ et $\sigma = (2; 3; 5; 1; 4; 7; 6)$, la permutation σ a exactement 4 records, en positions 1, 2, 3 et 6 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma) = 4$).

Le cas $n = 3$

△ **L6** Donner toutes les permutations de $\{1; 2; 3\}$ ayant exactement 2 records.

Le cas $n = 4$

Dans cette partie on étudie le cas $n = 4$.

□ **M50** Le nombre de permutations de $\{1; 2; 3; 4\}$ est :

- A** 24 **B** 6 **C** 256 **D** 16 **E** aucune des autres réponses

□ **M51** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 4$ est :

- A** 1 **B** 2 **C** 11 **D** 3 **E** 6

□ **M52** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 1$ est :

- A** 1 **B** 2 **C** 11 **D** 3 **E** 6

△ **L7** Donner les permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 3$.

□ **M53** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 2$ est :

- A** 6 **B** 1 **C** 2 **D** 11 **E** 3

Le cas $n \geq 4$

□ **M54** Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ est :

- A** 2^{n+1} **B** aucune des autres réponses **C** $n!$ **D** 2^n **E** n^n

M55 Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant n records est :

- A** 1 **B** n **C** 2^n **D** 2^{n-1} **E** aucune des autres réponses

M56 Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ n'ayant qu'un seul record est :

- A** $n + 2$ **B** $\frac{n(n-1)}{2}$ **C** $2(n-1)$ **D** $2^{n-1} - 2$ **E** $(n-1)!$

Permutations ayant $n - 1$ records

M57 Pour toute permutation σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records, on a :

- A** $\sigma(n-1) = n$ ou $\sigma(n) = n$
 B $\sigma(n) = n - 1$
 C $\sigma(n) < n - 1$
 D $\sigma(n) = 1$
 E $\sigma(n) = n$ ou $\sigma(n) = n - 1$

M58 Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records et telles que $\sigma(n-1) = n$ est :

- A** 1 **B** $(n-2)!$ **C** n **D** $n-1$ **E** 0

M59 Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records et telles que $\sigma(n) = n$ et $\sigma(1) \neq 1$ est :

- A** n **B** $n-2$ **C** 0 **D** $n-1$ **E** 1

M60 Soit k un élément de $\{2; \dots; n-1\}$. Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records et telles que $\sigma(n) = n$, $\sigma(1) = 1$ et n'ayant pas de record en position k est :

- A** $1 + 2 + \dots + (k-1)$ **B** $1 + 2 + \dots + (n-1)$ **C** $n-1$ **D** 1 **E** $k-2$

M61 Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records, et telles que $\sigma(n) = n$ et $\sigma(1) = 1$, est :

- A** $\frac{n^2 - 5n + 6}{2}$ **B** $n-1$ **C** $n-2$ **D** $\frac{n^2 - 3n - 2}{2}$ **E** 1

L8 Donner le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records.

Permutations ayant 2 records

M62 Soit p un élément de $\{2; \dots; n\}$. Le nombre de p -listes $(k_1; k_2; \dots; k_p)$ d'éléments distincts de $\{1; 2; \dots; n\}$ dont k_p est le plus grand élément vaut :

- A** $\frac{n!}{(n-p)!}$ **B** n^{p-1} **C** $(p-1)!$ **D** $\frac{n!}{p(n-p)!}$ **E** $\binom{n}{p}$

□ **M63** Soit p un élément de $\{2; \dots; n\}$. Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement deux records, lesquels sont atteints en positions 1 et p , est :

A $\frac{(n-1)!}{(p-1)!}$
 B $\frac{1}{p}$
 C $\frac{(n-1)!}{p}$
 D $\frac{(n-1)!}{p-1}$
 E $\frac{1}{p-1}$

□ **M64** Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement deux records est :

A $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{n}$
 B $(n-1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)$
 C $(n-1)! \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{n}\right)$
 D $1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{p!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}$
 E $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{n-1}$

Une loi de probabilité sur l'ensemble des permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$

On note \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$. On le munit de la probabilité uniforme \mathbf{P} , c'est-à-dire que, pour toute permutation σ de \mathcal{S}_n , on a $\mathbf{P}(\{\sigma\}) = \frac{1}{n!}$.

On définit une variable aléatoire \mathcal{R}_n qui à toute permutation σ de \mathcal{S}_n associe le nombre de records de σ .

On note, pour tout entier i de $\{1; 2; \dots; n\}$, T_i la variable aléatoire qui, à chaque permutation σ de \mathcal{S}_n , associe 1 si σ présente un record en position i , et 0 sinon. La variable T_1 est donc constante égale à 1.

□ **M65** L'espérance de \mathcal{R}_3 est :

A $\frac{5}{3}$
 B $\frac{4}{3}$
 C $\frac{11}{6}$
 D 2
 E $\frac{7}{6}$

□ **M66** La variance de \mathcal{R}_3 est :

A $\frac{19}{36}$
 B $\frac{5}{54}$
 C $\frac{7}{54}$
 D $\frac{13}{36}$
 E $\frac{17}{36}$

□ **M67** Soit i un élément de $\{1; 2; \dots; n\}$. La probabilité $\mathbf{P}(T_i = 1)$ vaut alors :

A $\frac{1}{i}$
 B $\frac{1}{i+1}$
 C $\frac{1}{i!}$
 D $\frac{1}{(i+1)!}$
 E aucune des autres réponses proposées

△ **R6** Justifier votre réponse à la question **M67**.

△ **L9** On admet que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est la somme de leurs espérances. Donner une expression simple de l'espérance de \mathcal{R}_n .