TeSciA

2025

Mathématiques Générales

Épreuve 1

15 mars 2025

14h-15h30 heure de Paris

Code sujet : ◯ ◯ ⬤

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiple* sont numérotées **M1**, **M2**, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2**, etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2**, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiple. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiple !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Calculs de limites

Dans cet exercice, on considère les fonctions

$$f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2 \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{x}\cdot$$

☐ **M1** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $f(x)$ tend vers :

[A] 0 ■ $+\infty$ [C] aucune limite [D] un nombre réel non nul [E] $-\infty$

☐ **M2** Quand x tend vers $-\infty$, la quantité $f(x)$ tend vers :

[A] aucune limite ■ $+\infty$ [C] un nombre réel non nul [D] $-\infty$ [E] 0

☐ **M3** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $g(x)$ tend vers :

[A] $+\infty$ [B] $-\infty$ [C] un nombre réel non nul [D] aucune limite ■ 0

☐ **M4** Quand x tend vers 0 avec $x < 0$, la quantité $g(x)$ tend vers :

■ $-\infty$ [B] $+\infty$ [C] 0 [D] aucune limite [E] un nombre réel non nul

☐ **M5** Quand x tend vers 0, la quantité $f(g(x))$ tend vers :

[A] $-\infty$ ■ $+\infty$ [C] 0 [D] aucune limite [E] un nombre réel non nul

☐ **M6** Quand x tend vers 0, la quantité $g(f(x))$ tend vers :

■ un nombre réel non nul [B] 0 [C] $-\infty$ [D] $+\infty$ [E] aucune limite

☐ **M7** Quand x tend vers $-\infty$, la quantité $g(f(x))$ tend vers :

[A] aucune limite [B] $+\infty$ [C] un nombre réel non nul [D] $-\infty$ ■ 0

☐ **M8** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $f(g(x))$ tend vers :

■ un nombre réel non nul [B] aucune limite [C] $-\infty$ [D] 0 [E] $+\infty$

☐ **M9** Quand x tend vers 1, la quantité $\dfrac{f(x)}{x-1}$ tend vers :

[A] aucune limite [B] une autre valeur que 0, 1 et $+\infty$ [C] 0 [D] $+\infty$ ■ 1

☐ **M10** Quand x tend vers 2, la quantité $\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ tend vers :

[A] une autre valeur que 0, 2 et 7 [B] aucune limite ■ 7 [D] 2 [E] 0

△ **L1** Donner la limite de $\dfrac{f(x)-4}{2g(x)-1}$ lorsque x tend vers 2.

Exercice 2. Géométrie plane

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$. On dispose sur le côté $[A,B]$ d'un point D tel que $AD=1$ et dont le projeté orthogonal E sur (AC) vérifie $EC=1$ et est sur le segment $[A,C]$.

☐ **M11** La distance AE vaut :

[A] aucune des autres réponses proposées ■ $\dfrac{1}{2}$ [C] $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ [D] $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ [E] 1

☐ **M12** La distance DE vaut :

[A] aucune des autres réponses proposées [B] 1 [C] $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ■ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ [E] $\dfrac{1}{2}$

☐ **M13** La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ est :

■ $\dfrac{\pi}{6}$ [B] aucune des autres réponses proposées [C] $\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$ [D] $\dfrac{\pi}{4}$ [E] $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

☐ **M14** La distance DB vaut :

[A] $\dfrac{1}{2}$ ■ 2 [C] aucune des autres réponses proposées [D] $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ [E] 1

☐ **M15** La distance BC vaut :

[A] $2\sqrt{3}$ [B] 1 [C] $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ■ aucune des autres réponses proposées [E] $\dfrac{1}{2}$

☐ **M16** La distance DC vaut :

[A] $\sqrt{3}$ [B] aucune des autres réponses proposées [C] 1 [D] $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ■ $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

☐ **M17** La valeur de $\cos(\widehat{DCE})$ est :

■ $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ [B] aucune des autres réponses proposées [C] $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ [D] $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ [E] $\dfrac{1}{6}$

☐ **M18** Quelle valeur proposée est la plus proche de $\sin(\widehat{DCE})$?

A 0,5 B 0,4 C 0,9 ■ 0,7 E 0,3

◯ **R1** Justifier votre réponse à la question **M18**.

☐ **M19** Quel intervalle contient la mesure de l'angle $\widehat{BDC}$?

A $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ B $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$ C $\left[\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{8}\right]$ D aucun des autres intervalles proposés ■ $\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice 3. Logarithmes et exponentielles

Calculs divers

☐ **M20** La quantité $\ln(16)$ est aussi égale à :

■ $4\ln(2)$ B $2\ln(8)$ C $(\ln(4))^2$ D $(\ln(2))^4$ E $3\ln(2)$

☐ **M21** La quantité $\ln(\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ est aussi égale à :

A -1 B 0 C $\frac{1}{2}$ D $\sqrt{\ln(e)} + \frac{1}{\ln(e)}$ ■ $-\frac{1}{2}$

☐ **M22** La quantité $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ est aussi égale à :

A 5 B aucune des autres réponses proposées ■ 0 D 1 E $\frac{5}{2}$

Équations et inéquations

☐ **M23** L'équation $x^2 + 4x + 3 = x + 7$ possède :

A plus de deux solutions ■ deux solutions C une seule solution D 0 solution

☐ **M24** L'équation $\ln(x^2 + 4x + 3) = \ln(x + 7)$ possède :

A plus de deux solutions B 0 solution C une seule solution ■ deux solutions

☐ **M25** L'équation $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$ possède :

[A] 0 solution [B] deux solutions ■ une seule solution [D] plus de deux solutions

☐ **M26** L'équation $e^{x^2}=\dfrac{1}{9}$ possède :

[A] deux solutions [B] une solution ■ 0 solution [D] plus de deux solutions

☐ **M27** L'équation $3e^x-7e^{-x}-20=0$ possède :

[A] plus de deux solutions [B] 0 solution ■ une seule solution [D] deux solutions

△ **L2** Donner les solutions de l'équation $e^x+e^{1-x}-e-1=0$.

☐ **M28** L'inéquation $x\ln(\sqrt{x})>\sqrt{x}\ \ln(x)$ a pour ensemble de solutions :

[A] $]0;1[\cup\left]\dfrac{9}{2};+\infty\right[$ ■ $]0;1[\cup]4;+\infty[$ [C] $]1;2[\cup]4;+\infty[$ [D] $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[\cup]4;+\infty[$ [E] $]4;+\infty[$

Calculs de fonctions dérivées

☐ **M29** La fonction $x\mapsto\ln(5x-1)$ est :

■ dérivable sur $\left]\dfrac{1}{5};+\infty\right[$ uniquement et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{5}{5x-1}$

[B] dérivable sur $\left]\dfrac{1}{5};+\infty\right[$ uniquement et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{5}{5x-1}\ln(5x-1)$

[C] aucune des autres réponses proposées n'est vraie

[D] dérivable sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{5}\right[\cup\left]\dfrac{1}{5};+\infty\right[$ uniquement et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{5}{5x-1}$

[E] dérivable sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{5}\right[\cup\left]\dfrac{1}{5};+\infty\right[$ uniquement et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{5}{5x-1}\ln(5x-1)$

☐ **M30** La fonction $x\mapsto\ln(|7-2x|)$ est :

[A] dérivable sur $\left]\dfrac{7}{2};+\infty\right[$ uniquement et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{2}{2x-7}\ln|2x-7|$

[B] dérivable sur $\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right[\cup\left]\dfrac{7}{2};+\infty\right[$ uniquement et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{2}{|7-2x|}$

[C] dérivable sur $\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right[\cup\left]\dfrac{7}{2};+\infty\right[$ uniquement et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{2}{7-2x}$

[D] dérivable sur $\left]\dfrac{7}{2};+\infty\right[$ uniquement et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{2}{2x-7}$

■ dérivable sur $\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right[\cup\left]\dfrac{7}{2};+\infty\right[$ uniquement et sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{2}{2x-7}$

☐ **M31** La fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est :

A dérivable sur $]0;+\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$

B dérivable sur $]1;+\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

C dérivable sur $]0;+\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

■ dérivable sur $]1;+\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$

E aucune des autres réponses proposées n'est vraie

☐ **M32** La fonction $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est :

A dérivable sur $\mathbb{R}^*$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

B dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

■ dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

D aucune des autres réponses proposées

E dérivable sur $\mathbb{R}^*$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Une fonction étonnante

On considère la fonction f qui à tout réel x dans $]-1;1[$ associe le réel

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right).$$

△ **L3** Donner la dérivée de f.

☐ **M33** Parmi f et sa fonction dérivée f', lesquelles tendent vers 0 en 1 ?

A f' B f ■ f et f' D Aucune d'entre elles.

Exercice 4. L'équation $a^x = x^a$

Lorsqu'on dispose de réels x et y tels que $x > 0$, on définit

$$x^y = \exp\big(y\ln(x)\big),$$

ce qui prolonge les définitions connues lorsque y est un entier.

On fixe a dans $\mathbb{R}_+^*$. On se propose d'étudier, selon les valeurs de a, le nombre de solutions de l'équation :

$$(E_a) \quad a^x = x^a$$

où l'inconnue x est dans $\mathbb{R}_+^*$.

On définit, pour tout a dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h_a sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h_a(x) = x\ln(a) - a\ln(x).$$

Étude du cas où $a = e$

☐ **M34** La fonction h_e est :

- [A] strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- [B] strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$
- ■ strictement décroissante sur $]0;e]$ et strictement croissante sur $[e;+\infty[$
- [D] strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- [E] aucune des autres réponses proposées

☐ **M35** L'équation (E_e) possède :

- [A] plus de deux solutions distinctes, mais en nombre fini
- [B] aucune solution
- [C] une infinité de solutions
- ■ une unique solution
- [E] exactement deux solutions distinctes

◯ **R2** Montrer que $\dfrac{x}{\ln(x)} \geqslant e$ pour tout réel $x > 1$.

Étude du cas $a = 2$

☐ **M36** La fonction h_2 est :

■ strictement décroissante sur $\left]0; \dfrac{2}{\ln(2)}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{2}{\ln(2)}; +\infty\right[$

B strictement croissante sur $\left]0; \dfrac{2}{\ln(2)}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{2}{\ln(2)}; +\infty\right[$

C strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

D strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

E aucune des autres réponses proposées

△ **L4** Donner l'ensemble des solutions de (E_2).

Étude du cas $0 < a < 1$

☐ **M37** La fonction h_a est :

A strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

B strictement décroissante sur $\left]0; -\dfrac{a}{\ln(a)}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{a}{\ln(a)}; +\infty\right[$

■ strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

D strictement croissante sur $\left]0; -\dfrac{a}{\ln(a)}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{a}{\ln(a)}; +\infty\right[$

E aucune des autres réponses proposées

△ **L5** Donner l'ensemble des solutions de (E_a).

Étude du cas $1 < a$ et $a \neq e$

☐ **M38** La fonction h_a :

A présente un maximum strictement positif

B ne présente ni maximum ni minimum

■ présente un minimum strictement négatif

D présente un maximum strictement négatif

E présente un minimum strictement positif

☐ **M39** L'équation (E_a) a exactement une solution b différente de a, et :

■ $1 < b < a$ si $a > e$, tandis que $a < b$ si $a < e$

B $b < 1$

C $1 < b < a$ si $a < e$, tandis que $a < b$ si $a > e$

D aucune des autres affirmations proposées n'est vraie en toute généralité

E $a < b$

Exercice 5. Histoires d'urnes

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

Première situation

Une urne contient $n+1$ boules blanches et $n-1$ boules noires. Le jeu consiste à tirer une boule aléatoirement dans l'urne : chaque boule est tirée de manière équiprobable. Si la boule tirée est blanche, le joueur gagne, sinon il perd. On rappelle que $n > 1$.

☐ **M40** On note p la probabilité de gagner, et q celle de perdre. Alors :

- [A] $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ et $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$
- [B] $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ et $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$
- [C] $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$
- ■ $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ et $q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$
- [E] $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$ et $q = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$

☐ **M41** Le joueur reçoit 2 euros quand il gagne, et donne 3 euros quand il perd.
On note X la variable aléatoire donnant le résultat de la partie, en nombres d'euros pour le joueur.
Quelle que soit la valeur de n, l'espérance de X vaut :

[A] aucune des autres réponses [B] $\frac{n-5}{2n}$ [C] $\frac{n-1}{2n}$ [D] $\frac{1-n}{2n} + \frac{1}{4n}$ ■ $\frac{5-n}{2n}$

On adopte désormais de nouvelles règles. Le joueur tire d'abord une boule de l'urne ; ensuite, s'il a tiré une boule noire il met dans l'urne une boule blanche sans y remettre la boule tirée précédemment, alors que s'il a tiré une boule blanche il met dans l'urne une boule noire sans y remettre la boule tirée précédemment. Il procède ensuite à un deuxième tirage dans l'urne : si lors de ce deuxième tirage la boule tirée est blanche, il gagne, sinon il perd.

☐ **M42** On note p' la probabilité que le joueur gagne avec les nouvelles règles (alors que p désigne toujours la probabilité considérée dans la question **M40**). Alors :

- [A] Aucune des autres réponses proposées n'est vraie
- [B] $p' \geqslant p$ quelle que soit la valeur de n, et il est possible que $p' = p$
- [C] $p' > p$ quelle que soit la valeur de n
- ■ $p' < p$ quelle que soit la valeur de n
- [E] $p' \leqslant p$ quelle que soit la valeur de n, et il est possible que $p' = p$

Deuxième situation

L'urne contient désormais $n+1$ boules blanches, $n-1$ boules noires et deux boules orange, et on rappelle que $n > 1$. Le jeu consiste à tirer une boule aléatoirement dans l'urne : chaque boule est tirée de manière équiprobable. Si la boule tirée est blanche le joueur gagne, si elle est noire il perd, si elle est orange il procède à un nouveau tirage sans remettre la boule orange dans l'urne, et ce jusqu'à avoir tiré une boule blanche ou une boule noire. Le jeu se termine donc en trois tirages au plus. Le joueur reçoit 2 euros quand il gagne, et donne 3 euros quand il perd.

On note X la variable aléatoire donnant le résultat de la partie, en nombres d'euros pour le joueur.

On note D la variable aléatoire donnant le nombre total de boules tirées avant de gagner ou de perdre. Par exemple, la variable D prend la valeur 2 quand le joueur prend un boule orange au premier tirage, puis une boule blanche ou noire au deuxième.

☐ **M43** On note p'' la probabilité de gagner, et q'' celle de perdre. Alors :

A $p'' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4n}$ et $q'' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4n}$

■ $p'' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$ et $q'' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}$

C $p'' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4n}$ et $q'' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4n}$

D $p'' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}$ et $q'' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$

E $p'' = \dfrac{1}{2}$ et $q'' = \dfrac{1}{2}$

☐ **M44** Vrai ou Faux ? Quels que soient les entiers k et ℓ, les événements $[X = k]$ et $[D = \ell]$ sont indépendants.

■ Vrai B Faux

☐ **M45** L'espérance de la variable aléatoire D est égale à :

A aucune des autres réponses proposées, en toute généralité

B $\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+3n+2}$

■ $\dfrac{2n+3}{2n+1}$

D $\dfrac{4n^2+6n+6}{4n^2+6n+2}$

E 2

Troisième situation

On suppose ici que $n \geqslant 3$.

L'urne contient désormais n boules, dont deux sont blanches et toutes les autres noires. On vide l'urne en tirant les n boules successivement sans les remettre dans l'urne : chaque boule est tirée de manière équiprobable.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le rang de tirage de la première boule blanche trouvée. Par exemple, si on tire, dans l'ordre, 3 boules noires, 1 boule blanche, 2 boules noires, 1 boule blanche puis les boules noires restantes, alors X vaut 4.

On admet la formule :

$$1 + 2^2 + \cdots + k^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□ **M46** Pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, la probabilité $P(X=k)$ vaut :

A $\dfrac{2k}{n!}$ B $\dfrac{2k}{n(n-2)}$ C $\dfrac{2(n-k)}{n!}$ ■ $\dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$ E $\dfrac{2k}{n(n-1)}$

○ **R3** Justifier votre réponse à la question **M46**.

△ **L6** On désigne par Y la variable aléatoire donnant le rang de tirage de la deuxième boule blanche. Donner une relation entre l'espérance de Y et celle de X (qu'on ne demande pas de calculer).

□ **M47** L'espérance de X est égale à :

■ $\dfrac{n+1}{3}$ B aucune des autres réponses proposées, en toute généralité C $\dfrac{2(n-1)}{3}$ D $\dfrac{2n+1}{3}$ E $\dfrac{2(n+1)}{3}$

Exercice 6. Une suite récurrente

Dans tout l'exercice, on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \sin(x).$$

On se donne une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On dit que u est **stationnaire** lorsqu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $u_n = u_{n_0}$.
On dit qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est **stable par** f lorsque, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$.

☐ **M48** La fonction f est :

A décroissante, mais pas strictement décroissante
B ni croissante, ni décroissante
■ strictement croissante
D strictement décroissante
E croissante, mais pas strictement croissante

☐ **M49** Vrai ou Faux ? L'intervalle $[0;\pi]$ est stable par f.

A Faux ■ Vrai

☐ **M50** Vrai ou Faux ? L'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est stable par f.

■ Faux B Vrai

☐ **M51** Vrai ou Faux ? L'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ est stable par f.

A Faux ■ Vrai

☐ **M52** L'intervalle $[k\pi;(k+1)\pi]$ avec k dans $\mathbb{Z}$:

A n'est stable par f pour aucune valeur de k
B est stable par f si et seulement si k est impair
C ne vérifie aucune des autres propriétés proposées
■ est stable par f quelle que soit la valeur de k
E est stable par f si et seulement si k est pair

☐ **M53** L'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$ avec k dans $\mathbb{Z}$:

A ne vérifie aucune des autres propriétés proposées

■ est stable par f si et seulement si k est impair

C n'est stable par f pour aucune valeur de k

D est stable par f quelle que soit la valeur de k

E est stable par f si et seulement si k est pair

☐ **M54** Vrai ou Faux ? Si $u_0 \in [0;\pi]$ on peut affirmer que $0 \leqslant u_n \leqslant \pi$ quel que soit n dans $\mathbb{N}$.

A Faux ■ Vrai

☐ **M55** Si $u_0 \in]0;\pi[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A est croissante pour un nombre fini non nul de valeurs possibles de u_0, et seulement pour ces valeurs

B n'est ni croissante, ni décroissante

C est décroissante pour un nombre fini non nul de valeurs possibles de u_0, et seulement pour ces valeurs

■ est croissante

E est décroissante

☐ **M56** Si $u_0 \in]0;\pi]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A tend vers $+\infty$

B converge vers 0

■ converge vers π

D converge vers une limite $\ell \in]0;\pi[$

E n'a aucune de limite, finie ou non

◯ **R4** Justifier le résultat de la question **M56**.

☐ **M57** Si $u_0 \in]\pi;2\pi[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A n'est ni croissante, ni décroissante

B est croissante pour un nombre fini non nul de valeurs possibles de u_0, et seulement pour ces valeurs

C est décroissante pour un nombre fini non nul de valeurs possibles de u_0, et seulement pour ces valeurs

D est croissante

■ est décroissante

☐ **M58** Si $u_0 \in [\pi; 2\pi[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A tend vers $+\infty$

■ converge vers π

C n'a pas de limite, finie ou non

D converge vers 2π

E converge vers une limite $\ell \in]0; \pi[$

☐ **M59** On note k l'unique entier tel que $k\pi \leqslant u_0 < (k+1)\pi$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A ne converge jamais

■ converge vers $k\pi$ si et seulement si k est impair ou $u_0 = k\pi$

C converge vers $k\pi$ si et seulement si k est pair ou $u_0 = k\pi$

D converge toujours vers $k\pi$

E ne vérifie aucune des autres propriétés proposées

△ **L7** On note $x = u_0$ et, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente on note $\ell(x)$ sa limite. Préciser la valeur de $\ell(x)$ en fonction de x (lorsque cette limite existe).

☐ **M60** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A est stationnaire pour un nombre fini non nul de valeurs possibles de u_0

B ne vérifie aucune des autres propriétés proposées

■ est stationnaire si et seulement si u_0 est de la forme $k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$

D est stationnaire si et seulement si u_0 est de la forme $2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$

E n'est jamais stationnaire

Suites vérifiant une inégalité

Dans cette partie de l'exercice, on dit qu'une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ lorsque $v_{n+1} \geqslant f(v_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

△ **R5** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et telle que $v_0 = u_0$. Démontrer que $v_n \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☐ **M61** Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

A toutes les suites vérifiant $\mathcal{P}$ sont croissantes

B aucune suite vérifiant $\mathcal{P}$ n'est croissante

■ certaines suites vérifiant $\mathcal{P}$ sont croissantes, mais pas toutes

☐ **M62** Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

[A] toute suite vérifiant $\mathcal{P}$ est majorée, mais certaines ne sont pas minorées

■ toute suite vérifiant $\mathcal{P}$ est minorée, mais certaines ne sont pas majorées

[C] au moins une suite vérifiant $\mathcal{P}$ n'est ni majorée ni minorée

[D] toute suite vérifiant $\mathcal{P}$ est minorée et majorée

☐ **M63** Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

[A] aucune des autres propriétés indiquées n'est vraie

[B] il existe au moins une suite vérifiant $\mathcal{P}$ et qui tend vers $-\infty$

■ il existe au moins une suite vérifiant $\mathcal{P}$ et qui ne possède aucune limite, finie ou non

[D] toute suite vérifiant $\mathcal{P}$ converge ou tend vers $+\infty$, et au moins une ne converge pas

[E] toute suite vérifiant $\mathcal{P}$ converge

☐ **M64** Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, l'inégalité $0 < v_n \leqslant \pi$. Alors :

[A] elle tend vers $+\infty$

■ elle converge vers π

[C] elle converge, mais pas vers π

[D] on ne peut pas conclure

☐ **M65** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, l'inégalité $\pi \leqslant v_n < 2\pi$. Alors :

[A] on peut affirmer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π

■ on ne peut pas soutenir l'une des autres affirmations proposées

[C] on peut affirmer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

[D] on peut affirmer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, mais pas nécessairement vers π

☐ **M66** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. On note ℓ sa limite. Alors :

[A] on peut affirmer que $\ell = k\pi$ pour un entier relatif impair k

■ le nombre ℓ n'est pas nécessairement de la forme $k\pi$ pour un entier k

[C] on peut affirmer que $\ell = k\pi$ pour un entier relatif k, mais on ne peut pas statuer en général sur la parité de l'entier k

[D] on peut affirmer que $\ell = k\pi$ pour un entier relatif pair k

---

Exercice 7. Sommes alternées de parties entières

Pour un réel x on note $E(x)$ l'unique entier k qui vérifie $k \leqslant x < k+1$. Par exemple, $E(7{,}2) = 7$ et $E(-1{,}3) = -2$.

On pose $S_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note S_n la somme définie par :

$$S_n = -1 + E(\sqrt{2}) - E(\sqrt{3}) + \cdots + (-1)^k E(\sqrt{k}) + \cdots + (-1)^n E(\sqrt{n}).$$

☐ **M67** Soit m un entier naturel. L'égalité $E(\sqrt{k}) = m$ est réalisée si et seulement si k est un entier tel que :

■ $m^2 \leqslant k < (m+1)^2$

[B] $k \leqslant \sqrt{k} < k+1$

[C] aucune des autres réponses proposées

[D] $k \leqslant m < k+1$

[E] $m \leqslant k < m+1$

☐ **M68** Lorsque l'entier k varie dans $\mathbb{N}^*$, le réel $E(\sqrt{2k}) - E(\sqrt{2k-1})$ est nul sauf lorsque :

[A] aucune des autres réponses proposées

[B] $2k+1$ est le carré d'un entier

■ $2k$ est le carré d'un entier

[D] $2k-1$ est le carré d'un entier

[E] k est le carré d'un entier

☐ **M69** La valeur de S_6 est :

■ 1 [B] -2 [C] -1 [D] 2 [E] 0

☐ **M70** La valeur de S_{15} est :

[A] -1 [B] 2 ■ -2 [D] 0 [E] 1

△ **L8** Donner la valeur de S_{20}.

☐ **M71** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

[A] $S_{2n} = 1 + E(\sqrt{2}) + E(\sqrt{4}) + \cdots + E(\sqrt{2k}) + \cdots + E(\sqrt{2n})$ pour tout entier $n \geqslant 0$

■ $S_{2n} \geqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$

[C] Aucune des autres réponses proposées n'est vraie

[D] La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

[E] $|S_n| = 1 + E(\sqrt{2}) + E(\sqrt{3}) + \cdots + E(\sqrt{k}) + \cdots + E(\sqrt{n})$ pour tout entier $n \geqslant 0$

☐ **M72** La suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$:

- A converge
- B n'est ni croissante ni décroissante
- ■ tend vers $+\infty$
- D n'a pas de limite, finie ou non
- E ne vérifie aucune des autres propriétés proposées

△ **L9** Soit m un entier naturel. On note A_m la somme des termes $(-1)^k E(\sqrt{k})$ tels que $E(\sqrt{k}) = m$. Exprimer A_m en fonction de m.

☐ **M73** Pour tout entier naturel n, la somme S_{n^2-1} est égale à :

- A $(-1)^{n-1} E\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$
- B $(-1)^{n} E\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$
- ■ $(-1)^{n-1} E\left(\dfrac{n}{2}\right)$
- D aucune des autres réponses proposées, en général
- E $(-1)^{n} E\left(\dfrac{n}{2}\right)$

☐ **M74** Soit N un entier naturel, et n l'unique entier tel que $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$. Alors $S_N - S_{n^2-1}$ est égal à :

- A aucune des autres réponses proposées en général
- ■ 0 si $N - n^2$ est impair, et $(-1)^n n$ sinon
- C $(-1)^n n$ si $N - n^2$ est le carré d'un entier, et 0 sinon
- D 0 si $N - n^2$ est le carré d'un entier, et $(-1)^n n$ sinon
- E 0 si $N - n^2$ est pair, et $(-1)^n n$ sinon

△ **R6** Justifier que $|S_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

☐ **M75** Pour un entier relatif a, on note $N(a)$ le nombre d'entiers naturels n tels que $S_n = a$. On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs, et $2\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels pairs non nuls. Quelle affirmation est vraie ?

- A La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs $2\mathbb{N}^*$ et au moins une de ces valeurs est prise plusieurs fois
- B La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs $\mathbb{N}^*$ et prend chacune de ces valeurs exactement une fois
- ■ La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs $2\mathbb{N}$ et prend chacune de ces valeurs exactement une fois
- D La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs $2\mathbb{N}^*$ et prend chacune de ces valeurs exactement une fois
- E La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs $\mathbb{N}^*$ et au moins une de ces valeurs est prise plusieurs fois