



2025

Mathématiques Générales Avancées

Épreuve 2, Option B

15 mars 2025

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ○ ○ ●

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les *questions à choix multiple* sont numérotées **M1**, **M2**, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse \square . Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2**, etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse \triangle . Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2**, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse \circ ou la feuille-réponse \triangle , selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiple. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiple !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Calcul algébrique, équations et inéquations

□ **M1** L'expression de $\sqrt{\frac{3}{5}} \times \sqrt{\frac{24}{5}}$ sans radicaux au dénominateur est :

- A** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
 B $\frac{6\sqrt{10}}{5}$
 C $\frac{2\sqrt{15}}{5}$
 D $\frac{3\sqrt{10}}{5}$
 E $\frac{6\sqrt{2}}{5}$

□ **M2** Quand le réel x parcourt l'intervalle $]3; +\infty[$, le réel $\frac{2x-3}{1-x}$ parcourt l'intervalle :

- A** $] -\infty; -2[$
 B $] -2; -\frac{3}{2}[$
 C $] -2; -\frac{5}{3}[$
 D $] -1; -\frac{1}{2}[$
 E $] -1; \frac{3}{2}[$

□ **M3** Pour deux réels x et y , l'égalité $(x-y)^2 = (1+x^2)(1+y^2)$ est réalisée si et seulement si :

- A** $xy = -1$
 B $xy = 1$
 C $x > 0$ et $y < 0$
 D $x > 0$ et $y > 0$
 E $xy < 0$

□ **M4** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{3}{x-1} < \frac{2x^2}{x^2-1}$ est :

- A** $] -\frac{1}{2}; 1[$
 B $] -1; 1[\cup] 3; +\infty[$
 C $] -\infty; -1[\cup] 1; 3[$
 D aucune des autres réponses proposées
 E $] -1; -\frac{1}{2}[\cup] 1; 5[$

□ **M5** L'ensemble des solutions de l'équation

$$1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$$

est :

- A** $\{0; 1\}$
 B $\{0\}$
 C $\{0; 2\}$
 D aucune des autres réponses proposées
 E \emptyset

□ **M6** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x^2+21} \geq x-7$ est :

- A** $[2; +\infty[$
 B $] \frac{1}{3}; +\infty[$
 C $[7; +\infty[$
 D \mathbb{R}
 E \emptyset

□ **M7** La valeur de $\frac{7}{16} \ln(3+2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$ est :

- A** $\frac{1}{8} \ln(\sqrt{2}+1)$
 B 0
 C $\frac{1}{16} \ln(2\sqrt{2}+3)$
 D 1
 E $-\frac{1}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$

△ **L1** Donner le domaine de définition et une expression simplifiée de $A(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$.

□ **M8** Soit m un nombre réel. Le nombre de solutions de $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$ est :

- | | | |
|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> A $\begin{cases} 0 & \text{si } -1 < m < 2 \\ 1 & \text{si } m = -1 \text{ ou } 2 \\ 2 & \text{si } m > 2 \text{ ou } m < -1 \end{cases}$ | <input type="checkbox"/> B $\begin{cases} 0 & \text{si } m - 1 < 1 \\ 1 & \text{si } m - 1 = 1 \\ 2 & \text{si } m - 1 > 1 \end{cases}$ | <input type="checkbox"/> C $\begin{cases} 0 & \text{si } m < 1 \\ 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m > 1 \end{cases}$ |
| <input type="checkbox"/> D $\begin{cases} 0 & \text{si } m < -1 \\ 1 & \text{si } m = -1 \\ 2 & \text{si } m > -1 \end{cases}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{cases} 0 & \text{si } m < 1 \\ 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m > 1 \end{cases}$ | |

Exercice 2. Différence symétrique d'ensembles

Pour deux ensembles A_1 et A_2 , on note $A_1 \Delta A_2$ l'ensemble formé des objets x qui appartiennent à A_1 mais pas à A_2 et des objets x qui appartiennent à A_2 mais pas à A_1 . On dit que $A_1 \Delta A_2$ est la **différence symétrique** de A_1 et A_2 (dans cet ordre).

Par exemple :

- pour $A_1 = \{1; 2; 4\}$ et $A_2 = \{1; 2; 3\}$, on a $A_1 \Delta A_2 = \{3; 4\}$;
- pour l'ensemble B formé des élèves Léa, Paul et Séverine, et l'ensemble C formé des élèves Paul et Mathilde, l'ensemble $B \Delta C$ est formé des élèves Léa, Mathilde et Séverine, autrement dit $B \Delta C = \{\text{Léa, Mathilde, Séverine}\}$.

On rappelle aussi que $A_1 \cap A_2$ désigne l'ensemble des objets qui appartiennent à la fois à A_1 et à A_2 . Dans le premier exemple ci-dessus, on a donc $A_1 \cap A_2 = \{1; 2\}$, et dans le deuxième $B \cap C = \{\text{Paul}\}$.

On note \emptyset l'ensemble vide.

Propriétés élémentaires de la différence symétrique

△ **L2** Donner la différence symétrique des ensembles \mathbb{R}_- et \mathbb{Z} .

□ **M9** Vrai ou faux? On a $A \Delta B = B \Delta A$ quels que soient les ensembles A et B .

- A** Cette affirmation n'a pas de sens
 B Faux
 Vrai

□ **M10** Pour tout ensemble A , la différence symétrique $A \Delta A$ est égale à :

- A** A
 \emptyset
 C aucune des autres réponses

□ **M11** Pour tout ensemble A , la différence symétrique $A \Delta \emptyset$ est égale à :

- A** aucune des autres réponses
 A
 C \emptyset

M12 Pour tout ensemble A , l'ensemble $(A\Delta A)\Delta A$ est égal à :

- A** \emptyset **B** A **C** aucune des autres réponses

M13 Pour deux ensembles A et B , une condition équivalente au fait que $A\Delta B$ soit vide est :

- A** aucune des autres réponses
 B A est vide
 C $A = B$
 D A et B sont vides
 E B est vide

M14 Pour deux ensembles A et B , si tout élément de $A\Delta B$ est élément de A alors on peut affirmer que :

- A** aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue
 B B est vide
 C tout élément de B est élément de A
 D tout élément de A est élément de B
 E $A\Delta B$ est vide

M15 Pour deux ensembles A et B , si $A\Delta B$ possède exactement un élément alors on peut affirmer que :

- A** A est vide
 B ou bien tout élément de A est élément de B , ou bien tout élément de B est élément de A
 C aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue
 D B est vide
 E tout élément de A est élément de B

R1 Justifier votre réponse à la question **M15**.

M16 Soit A et B deux ensembles. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- A** Il existe toujours un et un seul ensemble X tel que $A\Delta X = B$
 B Il existe toujours plusieurs ensembles X tels que $A\Delta X = B$
 C Il existe toujours au moins un ensemble X tel que $A\Delta X = B$, mais il peut n'en exister qu'un seul ou plusieurs, selon le choix de A et B
 D Il peut ne pas exister d'ensemble X tel que $A\Delta X = B$, selon le choix de A et B

□ **M17** On introduit deux égalités qui peuvent être vraies ou non :

(i) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

(ii) $(A \cap B) \Delta C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$.

Lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A , B et C ?

- (i) mais pas (ii)
 aucune des deux
 (ii) mais pas (i)
 les deux

Différence symétrique et finitude

Pour un ensemble fini A , on note $c(A)$ le nombre de ses éléments (aussi appelé son cardinal).

□ **M18** On introduit trois implications, qui peuvent être vraies ou non :

(i) Si A et B sont finis alors $A \Delta B$ est fini.

(ii) Si $A \Delta B$ est fini alors A et B sont finis.

(iii) Si $A \Delta B$ et A sont finis alors B est fini.

Parmi ces implications, lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A et B ?

- toutes sauf (iii)
 toutes sauf (ii)
 les trois
 une seule
 toutes sauf (i)

□ **M19** Soit A et B deux ensembles finis tels que $A \Delta B$ soit fini. Le nombre $c(A \Delta B)$ vaut alors systématiquement :

$c(A) + c(B) - 2c(A \cap B)$

$c(A) + c(B) - c(A \cap B)$

$c(A) + c(B)$

$\frac{c(A)c(B)}{c(A \cap B)}$

aucune des autres valeurs proposées, en général

□ **M20** Quels que soient les ensembles finis A et B tels que $A \Delta B$ soit fini et $c(B)$ soit impair :

$c(A \Delta B)$ est pair

$c(A \Delta B)$ est impair

$c(A \Delta B)$ n'a pas la même parité que $c(A)$

$c(A \Delta B)$ a la même parité que $c(A)$

on ne peut pas statuer sur la parité de $c(A \Delta B)$, même en connaissant celle de $c(A)$

Différence symétrique itérée

M21 Soit A_1, A_2 et A_3 des ensembles. Pour un objet x , on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1; 2; 3\}$ tels que x appartienne à A_i . L'appartenance de x à $(A_1 \Delta A_2) \Delta A_3$ est alors équivalente à la condition :

A aucune des autres réponses proposées, en général

B $n(x) = 1$

C $n(x)$ est pair

D $n(x)$ est impair

E $n(x) = 2$

R2 En utilisant le résultat de la question **M21**, et en le combinant éventuellement avec d'autres résultats antérieurs (dont on citera alors les numéros de questions), démontrer que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ quels que soient les ensembles A, B et C .

Le résultat de **R2** permet de définir sans ambiguïté $A_1 \Delta \dots \Delta A_n$ pour n'importe quelle liste d'ensembles (A_1, \dots, A_n) , sans tenir compte de l'ordre de parenthésage. Par exemple $A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \Delta A_4$ peut être défini comme $((A_1 \Delta A_2) \Delta A_3) \Delta A_4$ mais aussi comme $A_1 \Delta ((A_2 \Delta A_3) \Delta A_4)$, ce qui fournit le même résultat.

M22 On note $A_i = \{1; i\}$ pour tout entier naturel $i \geq 1$. L'ensemble $A_1 \Delta \dots \Delta A_{2025}$ est alors égal à :

A $\{0; 2; \dots; 2025\}$

B \emptyset

C aucune des autres réponses proposées

D $\{0; 1; 2; \dots; 2025\}$

E $\{1; 2; \dots; 2025\}$

M23 Soit A_1, \dots, A_p des ensembles, où $p \geq 4$. Pour un objet x , on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1; 2; \dots; p\}$ tels que x appartienne à A_i . L'appartenance de x à $A_1 \Delta \dots \Delta A_p$ est alors équivalente à la condition :

A aucune des autres réponses proposées, en général

B $n(x)$ est impair

C $n(x)$ a la même parité que p

D $n(x) = 1$

E $n(x) = p - 1$

Classes stables

On appelle **classe** tout ensemble fini non vide dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles finis. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{C} = \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3; 5\}; \emptyset\}$ est une classe, ses éléments sont $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 3; 5\}$ et l'ensemble vide \emptyset (tous finis). Dans ce qui suit, les classes sont systématiquement représentées par des majuscules calligraphiées, par exemple $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, et leurs éléments sont représentés par des majuscules d'imprimerie, par exemple A, B, C .

Une classe \mathcal{C} est dite **stable** lorsque, quels que soient les éléments A et B de \mathcal{C} , l'objet $A\Delta B$ est un élément de \mathcal{C} .

Par exemple, la classe $\{\{1; 2; 3\}; \{1; 2; 4\}\}$ n'est pas stable car $\{1; 2; 3\}\Delta\{1; 2; 4\}$, qui vaut $\{3; 4\}$, n'en est pas un élément.

M24 Parmi les ensembles suivants, combien sont des classes stables ?

$\mathcal{A} = \{\{1; 2; 3\}, \emptyset\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{C} = \{\{1; 2; 3\}\}$, $\mathcal{D} = \emptyset$.

A aucun **B** quatre **C** deux **D** un **E** trois

On rappelle que pour un ensemble A , un **sous-ensemble** de A est un ensemble B tel que tout élément de B soit élément de A . Par exemple, \emptyset et A sont des sous-ensembles de A .

M25 Pour un ensemble fini X , l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de X :

- est toujours une classe stable
 B est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable
 C n'est pas toujours une classe

M26 Soit X un ensemble fini et Y un sous-ensemble de X . On considère l'ensemble \mathcal{C} des sous-ensembles Z de X tels que Y soit un sous-ensemble de Z . Alors \mathcal{C} :

- A** est toujours une classe stable
 B n'est pas toujours une classe
 est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable

M27 Soit X un ensemble fini. On considère :

- L'ensemble \mathcal{C} formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre pair d'éléments.
- L'ensemble \mathcal{D} formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre impair d'éléments.

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de X ?

A \mathcal{D} **B** \mathcal{C} **C** aucun d'entre eux **D** \mathcal{C} et \mathcal{D}

M28 Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux classes stables. On considère la différence symétrique $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$ et l'intersection $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$. Lesquelles sont des classes stables quel que soit le choix de \mathcal{C} et \mathcal{D} ?

A aucune d'entre elles **B** $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ **C** $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$ **D** $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$

□ **M29** Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux classes stables. On considère les ensembles suivants :

- L'ensemble \mathcal{E} constitué de toutes les différences symétriques $C\Delta D$, avec C élément de \mathcal{C} et D élément de \mathcal{D} .
- L'ensemble \mathcal{F} constitué de toutes les intersections $C \cap D$, avec C élément de \mathcal{C} et D élément de \mathcal{D} .

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de \mathcal{C} et \mathcal{D} ?

- A** \mathcal{F} **B** \mathcal{E} et \mathcal{F} **C** aucun d'entre eux **D** \mathcal{E}

Exercice 3. Une suite définie par récurrence

On s'intéresse dans cet exercice aux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = |u_n - n| \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On fixe une telle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tout au long de l'exercice.

Le cas particulier $u_0 = 0$

□ **M30** Si $u_0 = 0$ alors u_8 vaut :

- A** 4 **B** 1 **C** 6 **D** 0 **E** 2

△ **L3** On suppose dans cette question que $u_0 = 0$. Quelle conjecture peut-on formuler sur la valeur du couple (u_{2n}, u_{2n+1}) en fonction de n ?

Le cas général

□ **M31** Vrai ou Faux? La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite finie.

- A** Vrai **B** Faux

□ **M32** Si la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite finie alors cette limite est égale à :

- A** -1 **B** 2 **C** $\frac{1}{2}$ **D** 0 **E** 1

□ **M33** La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- A** de limite nulle **B** bornée **C** non bornée **D** périodique **E** de limite $\frac{n}{2}$

R3 Justifier votre réponse à la question **M33**.

M34 On fait l'hypothèse qu'il existe un entier N tel que $u_n \geq n$ pour tout entier $n \geq N$. La conséquence la plus immédiate que l'on peut alors en tirer est qu'il existe une constante K telle que :

A $u_n = K + \frac{n(n-1)}{2}$ pour tout entier $n \geq N$

B $u_n = K - \frac{n^2}{2}$ pour tout entier $n \geq N$

C $u_n = K + \frac{n^2}{2}$ pour tout entier $n \geq N$

D $u_n = K - \frac{n}{2}$ pour tout entier $n \geq N$

E $u_n = K - \frac{n(n-1)}{2}$ pour tout entier $n \geq N$

M35 Vrai ou Faux? Il existe un entier naturel N tel que $u_n \geq n$ pour tout entier $n \geq N$.

A Vrai **B** Faux

À partir de maintenant et dans toutes les questions suivantes, on suppose que, pour tout entier naturel N , il existe un entier $n \geq N$ tel que $u_n < n$.

M36 Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

A Aucune des autres réponses proposées n'est vraie.

B La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être arithmétique, et dans ce cas sa raison est nécessairement $\frac{1}{2}$.

C La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas être arithmétique.

D La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être arithmétique, et dans ce cas sa raison est nécessairement $-\frac{1}{2}$.

E La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être arithmétique, et dans ce cas sa raison peut être $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$, selon les cas.

On suppose dans la suite qu'il existe un entier $p > 0$ tel que $u_p < p$, et on en fixe un définitivement.

R4 Montrer que $u_n < n$ pour tout entier $n \geq p$.

M37 Pour tout entier $n \geq p$, le terme u_{n+2} est égal à :

A u_n **B** $u_n + 1$ **C** $-u_n + 1$ **D** $u_n - 1$ **E** u_{n+1}

M38 Pour tout entier naturel n , on définit $\alpha_n = u_n - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}$. Alors, pour tout entier $n \geq p$, le terme α_{n+1} vaut :

A $\alpha_n - \frac{1}{4}$ **B** α_n **C** $-\alpha_n$ **D** $-\alpha_n + \frac{1}{2}$ **E** $\alpha_n + \frac{1}{4}$

M39 On peut donc conclure à l'existence d'un réel C tel que, pour tout entier $n \geq p$:

A $u_n = \frac{n}{2} + C^n$

B $u_n = \frac{n}{2} + (-1)^n C$

C $u_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} + (-1)^n C$

D $u_n = -\frac{n}{2} + \frac{1}{4} + (-1)^n C$

$u_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + (-1)^n C$

Exercice 4. Détection de réels par des suites d'entiers

On fixe un objet mathématique qui n'est pas un nombre réel, et on le note $+\infty$ (sa nature profonde n'a pas d'importance dans la suite). On note $]1; +\infty]$ l'ensemble formé de $+\infty$ et des réels strictement supérieurs à 1.

Pour un élément x de $]1; +\infty]$:

- ou bien x est réel et on note $E(x)$ l'unique entier naturel tel que $k \leq x < k + 1$ (autrement dit, la partie entière de x) ;
- ou bien $x = +\infty$ et on pose $E(x) = +\infty$.

Pour un élément x de $]1; +\infty]$, on définit un objet x' comme suit :

- $x' = \frac{1}{x - E(x)}$ si x est un réel mais pas un entier ;
- $x' = +\infty$ dans tout autre cas.

On rappelle enfin qu'un nombre rationnel est un nombre de la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers relatifs dont $b \neq 0$. On admet que tout nombre rationnel r possède une unique écriture sous la forme $r = \frac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q un entier naturel non nul tels que p et q n'aient aucun diviseur premier commun : on dit qu'il s'agit de l'écriture de r sous forme irréductible.

Considérations élémentaires sur la transformation $x \mapsto x'$

M40 Vrai ou faux? L'objet x' est dans $]1; +\infty]$ quel que soit x dans $]1; +\infty]$.

Vrai

B Faux

- M41** On donne quatre affirmations :
- (i) Si x est un entier alors x' n'est pas un entier.
 - (ii) Si x est un entier alors x' est un entier.
 - (iii) Si x n'est pas un entier alors x' n'est pas un entier.
 - (iv) Si x n'est pas un entier alors x' est un entier.

Combien sont vraies indépendamment du choix de x dans $]1; +\infty[$?

- 1 B 0 C 3 D 2 E 4

\triangle **L4** Donner sans justification les x dans $]1; +\infty[$ pour lesquels $x' = x$.

- M42** On donne quatre affirmations :
- (i) Si x est un rationnel alors x' est un rationnel.
 - (ii) Si x est un rationnel alors x' n'est pas un rationnel.
 - (iii) Si x n'est pas un rationnel alors x' n'est pas un rationnel.
 - (iv) Si x n'est pas un rationnel alors x' est un rationnel.

Laquelle est vraie indépendamment du choix de x dans $]1; +\infty[$?

- A (i) B (iv) C (ii) (iii) E Aucune d'entre elles

Itérations de l'opération prime, suite des parties entières

On part d'un élément x de $]1; +\infty[$. On construit une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $]1; +\infty[$ par récurrence en posant $r_0 = x$ et en imposant, pour tout entier naturel n , la relation

$$r_{n+1} = (r_n)'$$

On construit alors en parallèle la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$c_n = E(r_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Par exemple, pour $x = \frac{3}{2}$ on a $r_0 = \frac{3}{2}$, $r_1 = 2$, $r_2 = +\infty$, etc., et $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = +\infty$, etc.

- M43** On suppose que $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Alors c_{2025} vaut :

- A 2 B 3 1 D 0 E $+\infty$

- M44** On suppose que $x = \sqrt{3}$. Alors c_{2025} vaut :

- 1 B 2 C 0 D $+\infty$ E 4

△ **L5** On suppose que $c_7 = +\infty$ et $c_6 = 2$. Que vaut r_6 ?

□ **M45** On suppose que $c_7 = +\infty$, que $c_i = 2$ pour tout entier pair i compris entre 0 et 6, et que $c_i = 1$ pour tout entier impair i compris entre 0 et 6. Alors x vaut :

- A** $\frac{41}{15}$ **B** il n'y a pas assez d'informations pour le savoir **C** $\frac{153}{56}$ $\frac{112}{41}$ **E** $\frac{194}{71}$

□ **M46** On se donne une liste $(d_0; \dots; d_p)$ d'entiers naturels non nuls. On dit que x est adapté à cette liste lorsque $c_k = d_k$ pour tout entier k compris entre 0 et p , et $c_{p+1} = +\infty$. On introduit plusieurs affirmations :

- (i) S'il existe un nombre réel $x > 1$ adapté à $(d_0; \dots; d_p)$ alors $d_p \neq 1$.
(ii) Si $d_p \neq 1$ alors il existe un nombre réel $x > 1$ adapté à $(d_0; \dots; d_p)$.

Lesquelles sont vraies indépendamment du choix de $(d_0; \dots; d_p)$?

- Toutes **B** (i) **C** (ii) **D** Aucune

Terminaison pour les rationnels

Pour un nombre rationnel positif x , que l'on écrit sous forme irréductible $x = \frac{p}{q}$, l'entier $p + q$ est appelé **poids** de x .

□ **M47** Soit x un rationnel strictement supérieur à 1 tel que x' soit rationnel. On note $x = \frac{p}{q}$ son écriture sous forme irréductible. On introduit deux affirmations :

- (i) L'écriture sous forme irréductible de x' a q pour numérateur.
(ii) Le poids de x' est strictement inférieur à celui de x .

Lesquelles sont vraies?

- Toutes **B** Aucune **C** (ii) **D** (i)

□ **M48** On donne deux implications :

- (i) Si x est rationnel ou vaut $+\infty$ alors il existe un entier naturel n tel que $r_n = +\infty$.
(ii) S'il existe un entier naturel n tel que $r_n = +\infty$ alors x est rationnel ou vaut $+\infty$.

Lesquelles sont vraies?

- Toutes **B** (i) **C** (ii) **D** Aucune

Caractérisation par la suite des parties entières

On reprend la construction précédente. Cette fois-ci, on suppose plus précisément que x n'est ni un nombre rationnel ni $+\infty$. On se propose dans ce cas de démontrer que la connaissance de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suffit à reconstituer x . Pour clarifier le discours, on notera désormais $c_n(x)$ le terme de rang n de cette suite, afin de marquer la dépendance envers x . De même, on notera $r_n(x)$ le terme de rang n de la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$, afin de bien marquer sa dépendance

envers x .

△ **R5** Soit x et y deux nombres non rationnels dans $]1, +\infty[$. On suppose que $c_0(x) = c_0(y)$ et $c_1(x) = c_1(y)$.

Démontrer qu'il existe des entiers naturels non nuls a, b, c, d tels que $x = \frac{ar_2(x) + b}{cr_2(x) + d}$ et $y = \frac{ar_2(y) + b}{cr_2(y) + d}$, et en déduire que $|x - y| \leq \frac{|r_2(x) - r_2(y)|}{4}$.

□ **M49** Soit x et y deux nombres réels strictement supérieurs à 1. On suppose trouvé un entier naturel n tel que $c_k(x) = c_k(y)$ pour tout entier k compris entre 0 et $2n$.

Quelle affirmation la plus précise peut-on déduire de cette hypothèse, par application directe de résultats antérieurs ?

A $|x - y| \leq \frac{1}{2^n}$

B $|x - y| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$

C $|x - y| \leq \frac{1}{4^n}$

D $|x - y| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

E Aucune des autres réponses proposées

Exercice 5. Records d'une permutation

Dans tout l'exercice, on fixe un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

On appelle **permutation** de $\{1; 2; \dots; n\}$ toute liste (ordonnée) $(i_1; \dots; i_n)$ dans laquelle chaque entier de 1 à n est représenté exactement une fois. Pour la liste $\sigma = (i_1; \dots; i_n)$, on écrit aussi $\sigma(k) = i_k$. Par exemple, pour $n = 4$ la liste $\sigma = (4; 3; 1; 2)$ est une permutation de $\{1; 2; 3; 4\}$ et $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 2$.

On dit qu'une permutation σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ présente un **record en position** i (où $i \in \{1; 2; \dots; n\}$) si $i = 1$ ou si $i > 1$ et $\sigma(i)$ est le plus grand des nombres $\sigma(1); \sigma(2); \dots; \sigma(i)$. On note $\mathcal{R}(\sigma)$ le nombre de records de la permutation σ .

Par exemple, pour $n = 6$ et $\sigma = (4; 3; 1; 6; 2; 5)$, la permutation σ a exactement 2 records, en positions 1 et 4 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma) = 2$).

Ou encore, pour $n = 7$ et $\sigma = (2; 3; 5; 1; 4; 7; 6)$, la permutation σ a exactement 4 records, en positions 1, 2, 3 et 6 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma) = 4$).

Le cas $n = 3$

△ **L6** Donner toutes les permutations de $\{1; 2; 3\}$ ayant exactement 2 records.

Le cas $n = 4$

Dans cette partie on étudie le cas $n = 4$.

M50 Le nombre de permutations de $\{1; 2; 3; 4\}$ est :

- A** 16 **B** aucune des autres réponses **C** 256 **D** 24 **E** 6

M51 Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 4$ est :

- A** 11 **B** 3 **C** 6 **D** 1 **E** 2

M52 Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 1$ est :

- A** 1 **B** 11 **C** 6 **D** 3 **E** 2

L7 Donner les permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 3$.

M53 Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; 3; 4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma) = 2$ est :

- A** 11 **B** 2 **C** 3 **D** 6 **E** 1

Le cas $n \geq 4$

M54 Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ est :

- A** n^n **B** 2^n **C** aucune des autres réponses **D** 2^{n+1} **E** $n!$

M55 Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant n records est :

- A** n **B** aucune des autres réponses **C** 2^{n-1} **D** 1 **E** 2^n

M56 Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ n'ayant qu'un seul record est :

- A** $(n-1)!$ **B** $2^{n-1} - 2$ **C** $n+2$ **D** $2(n-1)$ **E** $\frac{n(n-1)}{2}$

Permutations ayant $n - 1$ records

M57 Pour toute permutation σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records, on a :

- A** $\sigma(n) = n - 1$
 B $\sigma(n) < n - 1$
 C $\sigma(n) = 1$
 D $\sigma(n-1) = n$ ou $\sigma(n) = n$
 E $\sigma(n) = n$ ou $\sigma(n) = n - 1$

M58 Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records et telles que $\sigma(n - 1) = n$ est :

A $(n - 2)!$ **B** n $n - 1$ **D** 0 **E** 1

M59 Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records et telles que $\sigma(n) = n$ et $\sigma(1) \neq 1$ est :

A $n - 1$ **B** 1 **C** 0 $n - 2$ **E** n

M60 Soit k un élément de $\{2; \dots; n - 1\}$. Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records et telles que $\sigma(n) = n, \sigma(1) = 1$ et n'ayant pas de record en position k est :

A $1 + 2 + \dots + (k - 1)$ $k - 2$ **C** $1 + 2 + \dots + (n - 1)$ **D** 1 **E** $n - 1$

M61 Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records, et telles que $\sigma(n) = n$ et $\sigma(1) = 1$, est :

A $n - 1$ **B** $n - 2$ **C** 1 **D** $\frac{n^2 - 3n - 2}{2}$ $\frac{n^2 - 5n + 6}{2}$

L8 Donner le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement $n - 1$ records.

Permutations ayant 2 records

M62 Soit p un élément de $\{2; \dots; n\}$. Le nombre de p -listes $(k_1; k_2; \dots; k_p)$ d'éléments distincts de $\{1; 2; \dots; n\}$ dont k_p est le plus grand élément vaut :

A $\binom{n}{p}$ **B** $\frac{n!}{(n - p)!}$ $\frac{n!}{p(n - p)!}$ **D** n^{p-1} **E** $(p - 1)!$

M63 Soit p un élément de $\{2; \dots; n\}$. Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement deux records, lesquels sont atteints en positions 1 et p , est :

A $\frac{(n - 1)!}{(p - 1)!}$ **B** $\frac{(n - 1)!}{p}$ $\frac{(n - 1)!}{p - 1}$ **D** $\frac{1}{p}$ **E** $\frac{1}{p - 1}$

□ **M64** Le nombre de permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant exactement deux records est :

- A** $1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{p!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}$
 B $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{n}$
 C $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{n-1}$
 D $(n-1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)$
 E $(n-1)! \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

Une loi de probabilité sur l'ensemble des permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$

On note \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations de $\{1; 2; \dots; n\}$. On le munit de la probabilité uniforme \mathbf{P} , c'est-à-dire que, pour toute permutation σ de \mathcal{S}_n , on a $\mathbf{P}(\{\sigma\}) = \frac{1}{n!}$.

On définit une variable aléatoire \mathcal{R}_n qui à toute permutation σ de \mathcal{S}_n associe le nombre de records de σ .

On note, pour tout entier i de $\{1; 2; \dots; n\}$, T_i la variable aléatoire qui, à chaque permutation σ de \mathcal{S}_n , associe 1 si σ présente un record en position i , et 0 sinon. La variable T_1 est donc constante égale à 1.

□ **M65** L'espérance de \mathcal{R}_3 est :

- A** $\frac{4}{3}$ **B** 2 **C** $\frac{11}{6}$ **D** $\frac{5}{3}$ **E** $\frac{7}{6}$

□ **M66** La variance de \mathcal{R}_3 est :

- A** $\frac{7}{54}$ **B** $\frac{17}{36}$ **C** $\frac{5}{54}$ **D** $\frac{13}{36}$ **E** $\frac{19}{36}$

□ **M67** Soit i un élément de $\{1; 2; \dots; n\}$. La probabilité $\mathbf{P}(T_i = 1)$ vaut alors :

- A** aucune des autres réponses proposées **B** $\frac{1}{i}$ **C** $\frac{1}{i!}$ **D** $\frac{1}{i+1}$ **E** $\frac{1}{(i+1)!}$

△ **L9** On admet que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est la somme de leurs espérances. Donner une expression simple de l'espérance de \mathcal{R}_n .