



2026

Mathématiques Expertes

Épreuve 2, Option A

14 mars 2026

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ○ ○ ●

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les *questions à choix multiple* sont numérotées **M1**, **M2**, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2**, etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2**, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ○ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

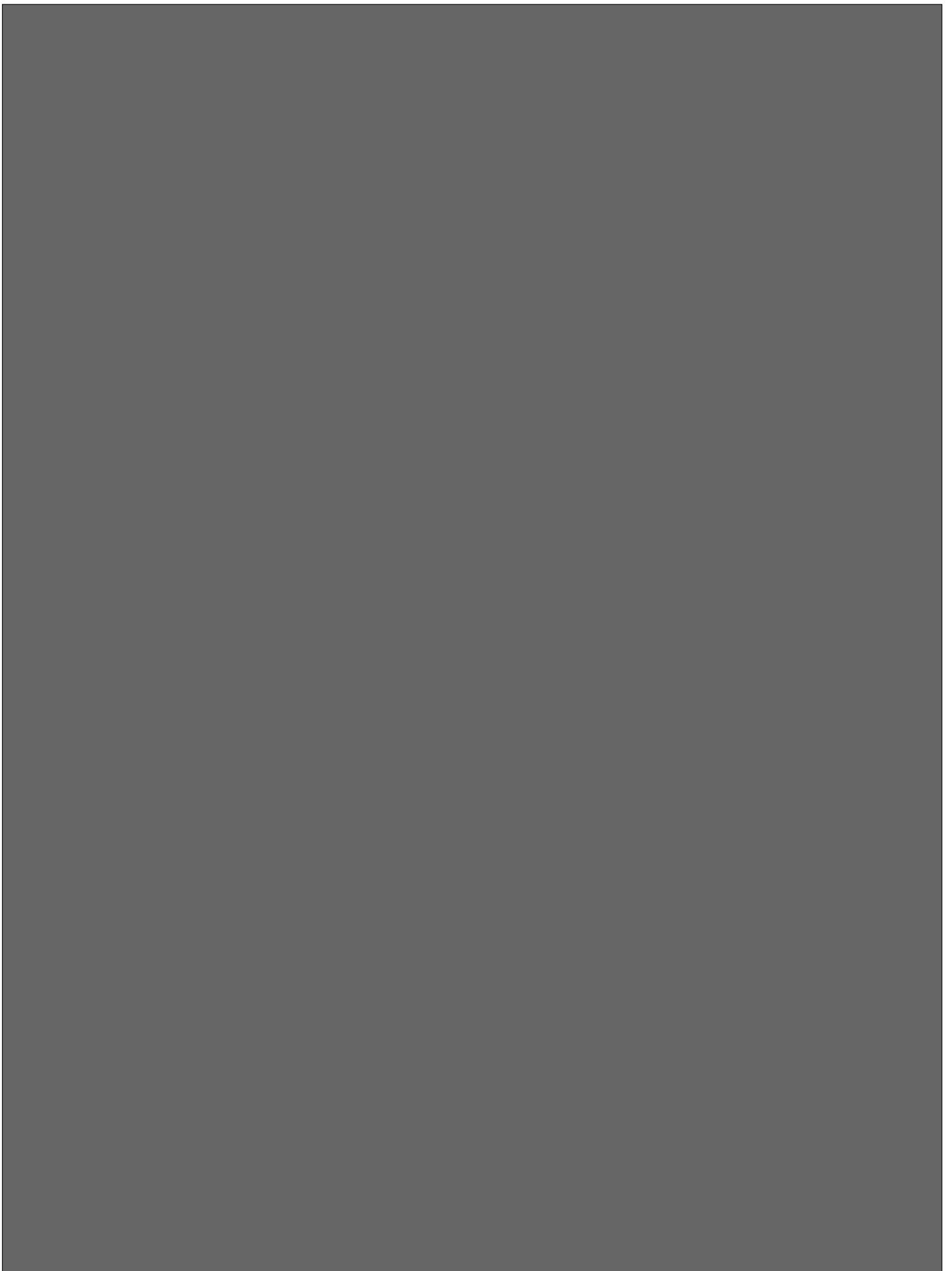
CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiple. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiple !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TeSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).

Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES



Exercice 1. Nombres complexes

Calculs algébriques

□ **M1** Le nombre complexe $(a + i)(1 + 2i)$ est imaginaire pur si et seulement si le réel a vaut :

- ☐ **A** 2
 ☐ **B** 1
 ☐ **C** $\frac{1}{2}$
 ☐ **D** 0
 ☐ **E** -2

□ **M2** Le produit de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\frac{1}{3 - 4i}$ vaut :

- ☐ **A** $-\frac{12}{25}$
 ☐ **B** $-\frac{1}{12}$
 ☐ **C** $-\frac{12}{625}$
 ☐ **D** $\frac{12}{625}$
 ☐ **E** $\frac{12}{25}$

□ **M3** La partie réelle du nombre complexe $\frac{3 - i}{4 + i}$ vaut :

- ☐ **A** $\frac{11}{5}$
 ☐ **B** $\frac{3}{4}$
 ☐ **C** $\frac{11}{17}$
 ☐ **D** $\frac{11}{\sqrt{17}}$
 ☐ **E** $\frac{13}{17}$

□ **M4** Le module du nombre complexe $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ vaut :

- ☐ **A** $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 ☐ **B** 1
 ☐ **C** $\frac{1}{2}$
 ☐ **D** $\sqrt{6}$
 ☐ **E** $\sqrt{\frac{3}{2}}$

□ **M5** On rappelle que l'argument principal d'un nombre complexe non nul est son seul argument appartenant à $]-\pi; \pi]$. On note α, β, γ les arguments principaux respectifs des nombres complexes $A = 4 + i$, $B = -5 + 2i$ et $C = 3 + 2i$. Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** $\beta < \alpha < \gamma$
 ☐ **B** $\alpha < \beta < \gamma$
 ☐ **C** $\gamma < \alpha < \beta$
 ☐ **D** Aucune des autres affirmations n'est vraie
☐ **E** $\alpha < \gamma < \beta$

△ **L1** Donner le nombre de solutions de l'équation $z^{2006} = 1$ dont la partie réelle est strictement positive.

□ **M6** On donne deux réels θ et φ . Pour que le nombre complexe $\cos(\theta) + i \sin(\varphi)$ soit de module 1, il faut et il suffit que :

- ☐ **A** $\theta - \varphi$ soit multiple de π
☐ **B** $\theta - \varphi$ soit multiple de 2π
☐ **C** $\theta - \varphi$ soit multiple de π ou $\theta + \varphi$ soit multiple de π
☐ **D** $\theta - \varphi$ soit multiple de 2π ou $\theta + \varphi$ soit multiple de 2π
☐ **E** aucune des autres conditions proposées

△ **L2** Donner, sous forme trigonométrique, les solutions non réelles de l'équation $z^5 - z^3 - z^2 + 1 = 0$ d'inconnue z complexe.

□ **M7** Les entiers naturels n tels que $\left(\sin\left(\frac{\pi}{45}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{45}\right)\right)^n = 1$ sont les multiples strictement positifs de :

- ☐ **A** 4
 ☐ **B** 45
 ☐ **C** 2
 ☐ **D** 90
 ☐ **E** 180

Équations et géométrie

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans un plan rapporté à un repère orthonormal. On rappelle qu'un **singleton** est un ensemble formé d'un seul point, et qu'une **paire** est un ensemble formé de deux points.

☐ **M8** L'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2$ est :

- ☐ **A** l'ensemble vide
- ☐ **B** aucun des autres ensembles proposés
- ☐ **C** une droite
- ☐ **D** un cercle
- ☐ **E** la réunion de deux droites sécantes

☐ **M9** L'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $z^2 + (\bar{z})^2 = 0$ est :

- ☐ **A** l'ensemble vide
- ☐ **B** la réunion de deux droites perpendiculaires
- ☐ **C** la réunion de deux droites sécantes non perpendiculaires
- ☐ **D** un singleton
- ☐ **E** une droite

☐ **M10** L'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $|z + 2i|^2 = z^2 + 4$ est :

- ☐ **A** la réunion d'une droite et d'un singleton sans point commun
- ☐ **B** la réunion d'une droite et d'une paire sans point commun
- ☐ **C** un singleton
- ☐ **D** une droite
- ☐ **E** la réunion de deux droites sécantes

Exercice 2. Amas de nombres réels

Un intervalle ouvert borné est un ensemble de la forme $]a; b[$ pour deux réels $a < b$. On prendra garde au fait que l'ensemble vide n'est pas un intervalle ouvert borné selon notre définition.

On rappelle que la réunion $A_1 \cup \dots \cup A_n$ de sous-ensembles $A_1, \dots, A_n$ de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels appartenant à au moins l'un des ensembles A_i . On rappelle que l'intersection de deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B . On rappelle enfin qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B , et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B .

On appelle **amas** toute réunion (finie non vide) d'intervalles ouverts bornés, peu importe leur disposition. Par exemple, $]0; 1[\cup]2; 5[\cup]-1; 3[$ est un amas, et $]0; 10[$ en est aussi un.

Pour un amas A , on admet qu'il existe une unique écriture $A =]a_1; b_1[\cup]a_2; b_2[\cup \dots \cup]a_n; b_n[$ où $n \geq 1$ est un entier et $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$. On dit que les intervalles $]a_i; b_i[$ sont les **composantes** de A , et l'entier n est donc le nombre de composantes de A . Bien entendu, lorsque A est un simple intervalle ouvert borné, l'écriture précédente se limite à $n = 1$. Enfin, la **mesure** de l'amas A est la quantité

$$\mu(A) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n).$$

Quelques exemples

☐ **M11** Le nombre de composantes de l'amas $]0; 2[\cup]1; 3[$ vaut :

- ☐ **A** aucune des autres propositions ☐ **B** 1 ☐ **C** 2 ☐ **D** 3 ☐ **E** 0

☐ **M12** La mesure de l'amas $]0; 2[\cup]1; 3[$ vaut :

- ☐ **A** 2 ☐ **B** 3 ☐ **C** 1 ☐ **D** 4 ☐ **E** 0

☐ **M13** Le nombre de composantes de l'amas $] -2; -1[\cup]0; 2[\cup]1; 3[$ vaut :

- ☐ **A** 1 ☐ **B** aucune des autres propositions ☐ **C** 2 ☐ **D** 0 ☐ **E** 3

☐ **L3** Donner un amas à 3 composantes et de mesure 1.

☐ **M14** L'ensemble des nombres réels vérifiant $-4 < x^2 - 4x < 5$:

- ☐ **A** est un amas possédant 2 composantes
☐ **B** est un amas possédant 4 composantes
☐ **C** n'est pas un amas
☐ **D** est un amas possédant 3 composantes
☐ **E** est un amas possédant 1 composante

☐ **M15** L'ensemble des nombres réels vérifiant $-4 \leq x^2 - 4x < 5$:

- ☐ **A** est un amas possédant 4 composantes
- ☐ **B** est un amas possédant 1 composante
- ☐ **C** est un amas possédant 3 composantes
- ☐ **D** n'est pas un amas
- ☐ **E** est un amas possédant 2 composantes

☐ **M16** L'ensemble des nombres réels vérifiant $-4 < x^2 - 4x \leq 5$:

- ☐ **A** est un amas possédant 1 composante
- ☐ **B** n'est pas un amas
- ☐ **C** est un amas possédant 4 composantes
- ☐ **D** est un amas possédant 3 composantes
- ☐ **E** est un amas possédant 2 composantes

☐ **R1** Justifier la réponse à la question **M16**.

L4 On considère l'amas A formé des réels *non entiers* compris entre 1 et 2026. Préciser le nombre n de composantes de A , ainsi que la mesure $\mu(A)$ de A .

☐ **M17** On considère l'amas A formé de la réunion des intervalles de la forme $]n; n+2+(-1)^n[$ où n parcourt $\{1; 2; 3; \dots; 2026\}$. Le nombre de composantes de A est :

- ☐ **A** 2 ☐ **B** 2026 ☐ **C** 1013 ☐ **D** 1012 ☐ **E** 1

☐ **M18** Comme dans la question **M17**, on considère l'amas A formé de la réunion des intervalles de la forme $]n; n+2+(-1)^n[$ où n parcourt $\{1; 2; 3; \dots; 2026\}$. La mesure de A est :

- ☐ **A** 1014 ☐ **B** 2026 ☐ **C** 4052 ☐ **D** 2028 ☐ **E** 1013

Opérations sur les amas

☐ **M19** Pour deux intervalles ouverts bornés $]a; b[$ et $]c; d[$, l'inclusion $]a; b[\subset]c; d[$ est systématiquement équivalente à la condition :

- ☐ **A** $a < c$ et $b < d$
- ☐ **B** aucune des autres conditions proposées
- ☐ **C** $c \leq a$ et $b \leq d$
- ☐ **D** $c < a$ et $b < d$
- ☐ **E** $a \leq c$ et $b \leq d$

☐ **M20** Pour deux intervalles ouverts bornés $]a; b[$ et $]c; d[$, l'intersection $]a; b[\cap]c; d[$:

- ☐ **A** est systématiquement vide
- ☐ **B** aucune des autres réponses proposées n'est correcte
- ☐ **C** est systématiquement un intervalle ouvert borné
- ☐ **D** est systématiquement un intervalle ouvert borné ou l'ensemble vide, et les deux cas sont possibles

☐ **M21** Pour deux intervalles ouverts bornés $]a; b[$ et $]c; d[$, les nombres de composantes possibles pour l'amas $]a; b[\cup]c; d[$ sont :

- ☐ **A** 1 et 2 ☐ **B** 1 ☐ **C** 2 ☐ **D** 1, 2 et 4 ☐ **E** aucune des autres réponses proposées

☐ **M22** Soit A un amas et x et y deux réels tels que $x < y$. L'affirmation la plus forte que l'on puisse soutenir est que :

- ☐ **A** Si x et y appartiennent à la même composante de A alors $[x; y] \subset A$
☐ **B** x et y appartiennent à la même composante de A si et seulement si $[x; y] \subset A$
☐ **C** Si $[x; y] \subset A$ alors x et y appartiennent à la même composante de A
☐ **D** aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **M23** On fixe un amas A à n composantes. Pour un intervalle ouvert non vide $]x; y[$, les nombres de composantes possibles pour l'amas $A \cup]x; y[$ sont :

- ☐ **A** 1 et n
☐ **B** 1, n et $n + 1$
☐ **C** aucune des autres réponses proposées
☐ **D** les entiers compris entre 1 et n au sens large
☐ **E** les entiers compris entre 1 et $n + 1$ au sens large

☐ **R2** Justifier la réponse à la question **M23**.

Dominique essaie de s'appuyer sur la question **M22** pour démontrer que si un amas A est la réunion de n intervalles ouverts $I_1, \dots, I_n$, alors A possède au plus n composantes. Voici son raisonnement :

1. « Je note p le nombre de composantes de A , et dans chacune des composantes de A je choisis un nombre. »
2. « J'ordonne les nombres ainsi obtenus pour les écrire $x_1 < \dots < x_p$. »
3. « Pour chaque entier i compris entre 1 et p , le nombre x_i est dans l'un des intervalles $I_1, \dots, I_n$. »
4. « Je conclus que $p \leq n$. »

☐ **M24** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

- ☐ **A** La conclusion de Dominique est juste, mais elle a oublié de préciser que dans l'étape 3, deux nombres x_i et x_j , avec $i \neq j$, ne peuvent pas appartenir au même intervalle I_k
☐ **B** La conclusion de Dominique est juste, mais elle a oublié de préciser que dans l'étape 3, un nombre x_i ne peut pas appartenir à plusieurs intervalles I_k
☐ **C** La conclusion de Dominique est juste, mais elle a oublié de préciser que dans l'étape 3, en faisant varier i on obtient tous les intervalles I_k possibles
☐ **D** La conclusion de Dominique est juste, et son raisonnement est complet
☐ **E** La conclusion de Dominique est fausse

☐ **M25** On réunit n amas (avec $n \geq 2$) ayant chacun n composantes. La meilleure inégalité que l'on puisse alors affirmer est que la réunion de ces amas a un nombre de composantes inférieur ou égal à :

- ☐ **A** $2n$ ☐ **B** n ☐ **C** n^2 ☐ **D** aucun des nombres proposés, en général ☐ **E** n^n

☐ **M26** Pour deux amas A et B ayant respectivement n et p composantes, l'affirmation la plus forte que l'on puisse soutenir est que si $A \cap B$ est un amas alors son nombre de composantes est inférieur ou égal à :

- ☐ **A** np ☐ **B** $n + p - 1$ ☐ **C** le plus grand entier parmi n et p ☐ **D** $n + p$
☐ **E** aucun des nombres proposés

Image d'un amas

☐ **M27** Étant donné un amas A , l'ensemble des réels x^2 , lorsque x parcourt A :

- ☐ **A** n'est jamais un amas
☐ **B** est toujours un amas
☐ **C** est un amas si 0 appartient à A , et n'en est pas un sinon
☐ **D** est un amas si 0 n'appartient pas à A , et n'en est pas un sinon
☐ **E** est un amas si tous les éléments de A sont positifs, et n'en est pas un sinon

☐ **M28** Étant donné un amas A ne contenant pas 0, l'ensemble des réels $\frac{1}{x}$, lorsque x parcourt A :

- ☐ **A** est un amas si tous les éléments de A sont strictement positifs, mais peut ne pas être un amas dans le cas contraire
☐ **B** aucune des autres réponses proposées n'est vraie
☐ **C** n'est jamais un amas
☐ **D** est toujours un amas

Amas à contraintes

☐ **M29** On considère l'ensemble E constitué des nombres de la forme $\frac{1}{n}$, où n est un entier naturel non nul. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ **A** Parmi les amas A tel que $E \subset A$, il en est un de plus petite mesure possible
☐ **B** Tout amas A tel que $E \subset A$ a une composante de la forme $]0; a[$
☐ **C** Tout amas A tel que $E \subset A$ est de mesure supérieure ou égale à 1
☐ **D** Il n'y a pas d'amas A tel que $E \subset A$
☐ **E** Il existe un amas A tel que $E \subset A$ et qui soit mesure inférieure ou égale à 10^{-3}

☐ **M30** On reprend l'ensemble E de la question **M29**, et on considère maintenant l'ensemble $F = [0; 1] \setminus E$, constitué de tous les réels compris entre 0 et 1 sauf les inverses des entiers naturels non nuls. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ **A** Il existe un amas de mesure 1 inclus dans F
- ☐ **B** Parmi les amas inclus dans F , il en existe un de plus grande mesure possible
- ☐ **C** F est un amas
- ☐ **D** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **E** Quel que soit $a \in]0; 1[$, il existe un amas de mesure a inclus dans F
-

Exercice 3. Questions variées d'arithmétique

☐ **L5** Donner le plus grand diviseur commun de 4368 et 1064.

☐ **M31** Dans l'écriture décimale de 3^{2026} , le chiffre des unités est :

- ☐ **A** 5 ☐ **B** 0 ☐ **C** 3 ☐ **D** 9 ☐ **E** 1

☐ **M32** Combien 1000 a-t-il de diviseurs qui sont à la fois positifs et pairs ?

- ☐ **A** 12 ☐ **B** 500 ☐ **C** 6 ☐ **D** 7 ☐ **E** 9

☐ **M33** Combien y a-t-il de nombres entiers n tels que $50 \leq n \leq 99$ et qui sont divisibles par 2 et par 3 ?

- ☐ **A** 11 ☐ **B** 10 ☐ **C** 12 ☐ **D** aucune des autres réponses proposées ☐ **E** 8

☐ **M34** Combien y a-t-il d'entiers naturels n tels que $1 \leq n \leq 267$ et qui sont divisibles par au moins un des nombres 2 et 3 ?

- ☐ **A** aucune des autres réponses proposées ☐ **B** 178 ☐ **C** 223 ☐ **D** 179 ☐ **E** 222

☐ **R3** Montrer par récurrence sur $k \geq 1$ l'énoncé suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit $(n+1)(n+2) \cdots (n+k)$ est divisible par $k!$. On pourra s'intéresser à la différence $(n+2)(n+3) \cdots (n+k+1) - (n+1)(n+2) \cdots (n+k)$. On attend une démonstration élémentaire, n'utilisant notamment pas le cours sur les coefficients binomiaux.

☐ **M35** Le plus grand entier naturel qui, pour tout entier $n \geq 1$, divise le produit $(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)$ est :

- ☐ **A** aucune des autres réponses ☐ **B** 15 ☐ **C** 1 ☐ **D** 2 ☐ **E** 3

☐ **M36** Soit p un nombre premier impair. Combien y a-t-il de couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 + p = y^2$?

- ☐ **A** Une infinité ☐ **B** 0 ☐ **C** $\frac{p-1}{2}$ ☐ **D** 1 ☐ **E** p

□ **M37** On forme à partir de deux chiffres a et b (dans $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$) des nombres m et n écrits ab et ba en base 10. Combien y a-t-il de couples $(a; b)$ où $a < b$ et $n - m$ est divisible par 9 mais n'est divisible par aucun entier strictement supérieur à 9?

- ☐ **A** 9 ☐ **B** 10 ☐ **C** 16 ☐ **D** 8 ☐ **E** aucune des autres réponses proposées

□ **M38** Combien y a-t-il d'entiers n tels que $1 \leq n \leq 100$ et 48 divise $n^3 + 20n$?

- ☐ **A** 25 ☐ **B** 24 ☐ **C** 49 ☐ **D** 50 ☐ **E** 100

□ **M39** Pour tout couple $(a; b)$ d'entiers naturels non nuls premiers entre eux, le pgcd de $a + b$ et $a^2 + b^2 - ab$ vaut :

- ☐ **A** aucune des autres réponses proposées
☐ **B** 1
☐ **C** ab
☐ **D** 1 ou 3, et les deux cas sont possibles selon le choix de a et b
☐ **E** 1 ou ab , et les deux cas sont possibles selon le choix de a et b

□ **M40** Combien y a-t-il d'entiers $n \geq 4$ tels que $n - 3$ divise $n^3 - 3$?

- ☐ **A** 2 ☐ **B** Une infinité ☐ **C** 6 ☐ **D** 8 ☐ **E** 10

Exercice 4. Image d'un cercle par diverses transformations du plan

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, ce qui permet de repérer les points par des affixes. On note $M(z)$ le point d'affixe z .

On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Pour un point Ω et un réel $r > 0$, on note $\mathcal{C}(\Omega; r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r . On note $\mathcal{U}$ le cercle $\mathcal{C}(O; 1)$.

Pour une fonction f qui associe à un point du plan un autre point du plan, et une partie $\mathcal{X}$ du plan, on note $f(\mathcal{X})$ l'ensemble formé des points $f(A)$ où le point A parcourt l'ensemble $\mathcal{X}$. On dit que $f(\mathcal{X})$ est l'**image** de $\mathcal{X}$ par f .

□ **M41** On note f l'application qui associe au point $M(z)$ le point $M(z + 2i)$. L'image du cercle $\mathcal{U}$ par f est :

- ☐ **A** un disque ☐ **B** un cercle ☐ **C** un segment de droite
☐ **D** la réunion d'un cercle et d'une droite ☐ **E** aucune des autres réponses proposées

□ **M42** Quand le nombre complexe z décrit $\mathbf{U}$ la valeur maximale prise par $|z + 2i|$ est :

- ☐ **A** 3 ☐ **B** $\sqrt{5}$ ☐ **C** 2 ☐ **D** $2i + 1$ ☐ **E** $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

□ **M43** Quand le nombre complexe z décrit $\mathcal{U}$ le nombre $|z + 2i|$ décrit :

- ☐ **A** $[0; 3]$
☐ **B** $[0; 2]$
☐ **C** Un sous-ensemble strict de $[1; 3]$
☐ **D** $[2i - 1; 2i + 1]$
☐ **E** $[1; 3]$

△ **L6** Soit $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Indiquer la valeur maximale prise par le nombre $|z + re^{i\alpha}|$ quand z décrit $\mathcal{U}$.

□ **M44** On note g l'application qui associe au point $M(z)$ le point $M(z^2)$. L'image du cercle $\mathcal{U}$ par g est :

- ☐ **A** le cercle $\mathcal{C}(O; 2)$
☐ **B** un sous-ensemble strict de $\mathcal{U}$
☐ **C** une autre réponse
 ☐ **D** le cercle $\mathcal{U}$
☐ **E** un demi-cercle

Image d'un cercle par une application polynomiale de degré 2

Dans toute cette partie, on considère l'application h qui au point $A = M(z)$ associe le point $h(A) = M(z^2 + z + 1)$. On cherche à comprendre la nature de l'ensemble image $h(\mathcal{U})$.

□ **M45** Pour tout réel θ , la distance de O au point $M(z^2 + z + 1)$ est, lorsque $z = e^{i\theta}$:

- ☐ **A** $|\cos \theta| + |\sin \theta|$
☐ **B** $2|\cos \theta| + 1$
☐ **C** $|1 + 2\cos \theta|$
☐ **D** $2|\cos \theta|$
☐ **E** $1 + 2\cos \theta$

□ **M46** Quand le point A décrit $\mathcal{U}$, la distance de O au point $h(A)$ décrit :

- ☐ **A** $[0; 1] \cup [2; 3]$
☐ **B** $[-1; 3]$
☐ **C** $[0; 3]$
☐ **D** $[0; 2]$
☐ **E** $[1; 3]$

□ **M47** L'ensemble $h(\mathcal{U})$:

- ☐ **A** n'est symétrique ni par rapport à l'axe des abscisses, ni par rapport à l'axe des ordonnées
☐ **B** est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées
☐ **C** est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, mais pas par rapport à l'axe des ordonnées
☐ **D** est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, mais pas par rapport à l'axe des abscisses

□ **M48** Les abscisses des points d'intersection de $h(\mathcal{U})$ avec l'axe des abscisses sont :

- ☐ **A** -1 et 1
☐ **B** 0 , 1 et 3
☐ **C** 1 et 3
☐ **D** tous les éléments de l'intervalle $[0; 3]$
☐ **E** -1 , 1 , $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

□ **M49** Combien de points de $h(\mathcal{U})$ appartiennent-ils à l'axe des ordonnées ?

- ☐ **A** une infinité
 ☐ **B** 1
☐ **C** 3
☐ **D** 2
☐ **E** 4

△ **L7** Indiquer l'abscisse minimale possible pour un point de $h(\mathcal{U})$.

□ **M50** L'ensemble $h(\mathcal{U})$ est :

- ☐ **A** aucune des autres réponses proposées
☐ **B** la réunion de deux cercles
☐ **C** la réunion de deux segments de droite
☐ **D** le disque de centre O et de rayon 3.
☐ **E** le cercle $\mathcal{C}(O; 3)$

△ **R4** Donner une représentation graphique aussi précise que possible de l'ensemble $h(\mathcal{U})$. On placera notamment les axes de coordonnées et les points d'intersection de $h(\mathcal{U})$ avec ceux-ci. Aucune justification n'est demandée.

Exercice 5. Blocs d'entiers

Lorsque a et b désignent deux entiers naturels tels que $a \leq b$, on note $\llbracket a; b \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leq k \leq b$. Par exemple, $\llbracket 2; 4 \rrbracket = \{2; 3; 4\}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par Ω_n l'ensemble des parties à n éléments de $\llbracket 1; 2n \rrbracket$, et on le munit de la loi de probabilité uniforme, notée P .

Lorsque A est un ensemble d'entiers, on appelle **bloc** de A tout sous-ensemble de A de la forme $\llbracket a; b \rrbracket$ où

$$1 \leq a \leq b \leq 2n \text{ avec } (a = 1 \text{ ou } a - 1 \notin A) \text{ et } (b = 2n \text{ ou } b + 1 \notin A).$$

Par exemple, $\{1; 2; 5\}$ a deux blocs : $\llbracket 1; 2 \rrbracket$ et $\{5\}$. L'ensemble $\{2; 4; 6; 7\}$ a trois blocs : $\{2\}$, $\{4\}$ et $\llbracket 6; 7 \rrbracket$.

On note X_n la variable aléatoire qui, à toute partie A à n éléments de $\llbracket 1; 2n \rrbracket$, associe le nombre de blocs de A . La variable X_1 est donc constante, de valeur 1.

□ **M51** Le nombre de blocs de $\{1; 2; 4; 6; 7; 10\}$ est :

- ☐ **A** 1 ☐ **B** 2 ☐ **C** 4 ☐ **D** 6 ☐ **E** 3

□ **M52** Les nombres de blocs possibles pour un A dans Ω_n sont les éléments de :

- ☐ **A** $\llbracket 1; n \rrbracket$ ☐ **B** aucun des autres ensembles proposés, en toute généralité ☐ **C** $\llbracket 0; n \rrbracket$
☐ **D** $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$ ☐ **E** $\{1; n\}$

△ **R5** Justifier la réponse à la question **M52**.

□ **M53** Le nombre d'éléments de Ω_n est :

- ☐ **A** $(2n)!$ ☐ **B** 2^n ☐ **C** $\binom{2n}{n}$ ☐ **D** $(2n)^n$
☐ **E** aucune des valeurs proposées, en toute généralité

△ **L8** Donner le nombre d'éléments de Ω_4 qui possèdent un bloc ayant exactement 3 éléments.

□ **M54** La probabilité $P(X_2 = 1)$ vaut :

- ☐ **A** $\frac{1}{4}$
☐ **B** $\frac{3}{4}$
☐ **C** $\frac{2}{3}$
☐ **D** $\frac{1}{3}$
☐ **E** $\frac{1}{2}$

□ **M55** La probabilité $P(X_3 = 1)$ vaut :

- ☐ **A** $\frac{1}{10}$
☐ **B** $\frac{1}{5}$
☐ **C** aucune des autres valeurs proposées
 ☐ **D** $\frac{1}{3}$
☐ **E** $\frac{1}{2}$

□ **M56** La probabilité $P(X_3 = 3)$ vaut :

- ☐ **A** $\frac{1}{3}$
☐ **B** aucune des autres valeurs proposées
 ☐ **C** $\frac{1}{5}$
☐ **D** $\frac{1}{10}$
☐ **E** $\frac{3}{20}$

□ **M57** L'espérance de X_3 vaut :

- ☐ **A** $\frac{18}{10}$
☐ **B** $\frac{17}{5}$
☐ **C** 2
 ☐ **D** $\frac{19}{10}$
☐ **E** $\frac{17}{10}$

Blocs et complémentation

On fixe ici l'entier $n \geq 2$. Pour A dans Ω_n , on note A^c son complémentaire, autrement dit l'ensemble $\llbracket 1; 2n \rrbracket \setminus A$: c'est un élément de Ω_n .

□ **M58** Pour tout A dans Ω_n , on a :

- ☐ **A** $X_n(A^c) \leq X_n(A)$
☐ **B** $X_n(A) + X_n(A^c) = n + 1$
☐ **C** $|X_n(A) - X_n(A^c)| \leq 1$
☐ **D** aucune des autres relations, en toute généralité
☐ **E** $X_n(A) \leq X_n(A^c)$

□ **M59** Laquelle des conditions suivantes est équivalente à l'identité $X_n(A) = X_n(A^c)$?

- ☐ **A** A contient 1 et 2
☐ **B** A ne contient ni 1 ni $2n$
☐ **C** A contient 1 et $2n$
☐ **D** Aucune des autres conditions citées, en toute généralité
☐ **E** A contient exactement un des éléments 1 et $2n$

On note :

- r_n la probabilité que $X_n(A) = X_n(A^c)$;
- s_n la probabilité que $X_n(A) > X_n(A^c)$;
- t_n la probabilité que $X_n(A) < X_n(A^c)$.

☐ **M60** Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** $s_n = t_n$ quel que soit n
☐ **B** $s_n > t_n$ pour certaines valeurs de n , et $s_n < t_n$ pour d'autres valeurs de n
☐ **C** $s_n \geq t_n$ quel que soit n , et pour certaines valeurs de n on a $s_n > t_n$
☐ **D** $s_n \leq t_n$ quel que soit n , et pour certaines valeurs de n on a $s_n < t_n$

☐ **M61** Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
☐ **B** $r_n > \frac{1}{2}$ quel que soit n
☐ **C** $r_n < \frac{1}{2}$ quel que soit n
☐ **D** $r_n \geq \frac{1}{2}$ quel que soit n , et pour certaines valeurs de n on a $r_n = \frac{1}{2}$
☐ **E** Pour certaines valeurs de n on a $r_n > \frac{1}{2}$, et pour d'autres on a $r_n < \frac{1}{2}$

☐ **M62** Lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité s_n tend vers :

- ☐ **A** 0 ☐ **B** $\frac{1}{3}$ ☐ **C** $\frac{1}{2}$ ☐ **D** $\frac{1}{4}$ ☐ **E** 1

Partitions d'entiers

Pour des entiers $n \geq 1$ et $k \geq 0$, on note :

- $a(n; k)$ le nombre de listes $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ d'entiers naturels non nuls tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, sous réserve que $k > 0$;
- $b(n; k)$ le nombre de listes $(y_0; y_1; \dots; y_{k+1})$ d'entiers naturels tels que $y_0 + y_1 + \dots + y_k + y_{k+1} = n$ et $y_1, \dots, y_k$ soient tous non nuls (en revanche, y_0 et y_{k+1} peuvent être nuls).

☐ **M63** Parmi les affirmations qui suivent, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** L'égalité $b(n; k) = a(n + 2; k + 1)$ est toujours vraie
☐ **B** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $b(n; k) = a(n + 2; k + 1)$
☐ **C** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
☐ **D** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $b(n; k) = a(n + 2; k + 2)$
☐ **E** L'égalité $b(n; k) = a(n + 2; k + 2)$ est toujours vraie

Dans les questions suivantes, on impose $k \geq 1$.

□ **M64** Parmi les affirmations qui suivent, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $a(n; k) = \binom{n}{k}$
- ☐ **B** L'égalité $a(n; k) = \binom{n}{k}$ est toujours vraie
- ☐ **C** L'égalité $a(n; k) = \binom{n-1}{k-1}$ est toujours vraie
- ☐ **D** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **E** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $a(n; k) = \binom{n-1}{k-1}$

□ **M65** On note $B(n; k)$ le nombre d'éléments de Ω_n ayant exactement k blocs. Parmi les affirmations qui suivent, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k-1)$
- ☐ **B** L'égalité $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k)$ est toujours vraie
- ☐ **C** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **D** L'égalité $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k-1)$ est toujours vraie
- ☐ **E** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k)$

□ **M66** Parmi les affirmations suivantes, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** Il existe une infinité d'entiers n pour lesquels il existe un entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $P(X_n = k) = P(X_n = n+1-k)$
- ☐ **B** L'égalité $P(X_n = k) = P(X_n = n+1-k)$ vaut quels que soient n et k
- ☐ **C** Il existe plusieurs couples $(n; k)$ tels que $P(X_n = k) = P(X_n = n+1-k)$
- ☐ **D** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **E** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $P(X_n = k) = P(X_n = n+1-k)$

□ **M67** On note E_n l'espérance de la variable aléatoire X_n . Parmi les affirmations suivantes, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **B** Il existe une quantité finie non nulle de valeurs de n pour lesquelles $E_n \neq \frac{n+1}{2}$
- ☐ **C** Il existe plusieurs entiers n tels que $E_n = \frac{n+1}{2}$
- ☐ **D** Il existe une infinité d'entiers n tels que $E_n = \frac{n+1}{2}$
- ☐ **E** L'égalité $E_n = \frac{n+1}{2}$ vaut quel que soit n