

Exercice 1. Géométrie plane

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère le point A de coordonnées $(0; 2)$, le point B de coordonnées $(3; 1)$ et enfin le point C de coordonnées $(9; 5)$.

☐ **M1** La plus grande longueur parmi AB , AC et BC est :

☐ **A** AB ☐ **B** BC ☒ AC

☐ **M2** Le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme a pour coordonnées :

☐ **A** $(-6; -2)$ ☐ **B** $(4; 8)$ ☐ **C** $(4; 12)$ ☒ $(6; 6)$ ☐ **E** $(12; 4)$

☐ **M3** Parmi les angles du triangle ABC , lesquels sont obtus ?

☐ **A** $\widehat{CAB}$ et $\widehat{BCA}$ ☐ **B** aucun ☐ **C** $\widehat{CAB}$ ☐ **D** $\widehat{BCA}$ ☒ $\widehat{ABC}$

☐ **R1** Justifier votre réponse à la question **M3**.

☐ **M4** On construit un point E tel que le triangle ABE soit rectangle et isocèle en A , et les points C et E soient situés de part et d'autre de la droite (AB) . Le point E possède alors pour coordonnées :

☐ **A** $(1; 5)$ ☐ **B** $(4; 4)$ ☒ $(-1; -1)$ ☐ **D** $(2; -2)$
☐ **E** aucune des autres réponses proposées

☐ **M5** Une équation cartésienne de la droite symétrique de (AB) par rapport à l'axe des abscisses est :

☐ **A** $2x + y - 2 = 0$ ☐ **B** $x - 3y + 6 = 0$ ☐ **C** $3x + y - 2 = 0$ ☒ $x - 3y - 6 = 0$
☐ **E** $2x - y + 2 = 0$

☐ **M6** Une équation cartésienne de la droite symétrique de (AB) par rapport au point C est :

☒ $x + 3y - 42 = 0$ ☐ **B** $x + 3y + 18 = 0$ ☐ **C** $x - 3y + 6 = 0$ ☐ **D** $3x + y - 64 = 0$
☐ **E** $x - 3y + 12 = 0$

☐ **M7** Le projeté orthogonal de C sur (AB) a pour coordonnées :

☒ $(7, 2; -0, 4)$ ☐ **B** $(7; -0, 5)$ ☐ **C** $(6, 9; -0, 4)$ ☐ **D** $(6, 9; -0, 2)$ ☐ **E** $(7, 4; -0, 8)$

☐ **M8** Dans le triangle ABC , le point d'intersection des hauteurs issues de B et C est le point de coordonnées :

☐ **A** $\left(\frac{11}{2}; -6\right)$ ☐ **B** $\left(\frac{11}{2}; -7\right)$ ☒ $\left(\frac{16}{3}; -6\right)$ ☐ **D** $\left(\frac{10}{3}; 7\right)$ ☐ **E** $\left(\frac{53}{10}; -\frac{69}{10}\right)$

Exercice 2. Limites de fonctions

☐ **M9** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $\exp\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$ tend vers :

☐ **A** $+\infty$ ☐ **B** $-\infty$ ☐ **C** 0 ☒ une limite finie non nulle ☐ **E** aucune limite, finie ou non

☐ **M10** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $\ln\left(\frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x-1}\right)$ tend vers :

☐ **A** aucune limite, finie ou non ☐ **B** $+\infty$ ☐ **C** 0 ☒ $-\infty$ ☐ **E** une limite finie non nulle

☐ **M11** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $\ln\left(\frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x+1}\right)$ tend vers :

☐ **A** $+\infty$ ☒ une limite finie non nulle ☐ **C** $-\infty$ ☐ **D** aucune limite, finie ou non ☐ **E** 0

☐ **M12** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $e^x - 2026x^{2026}$ tend vers :

☐ **A** une limite finie non nulle ☐ **B** 0 ☐ **C** $-\infty$ ☐ **D** aucune limite, finie ou non ☒ $+\infty$

☐ **M13** Quand x tend vers $-\infty$, la quantité $e^x - 2026x^{2026}$ tend vers :

☐ **A** $+\infty$ ☒ $-\infty$ ☐ **C** une limite finie non nulle ☐ **D** aucune limite, finie ou non ☐ **E** 0

☐ **L1** Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\frac{e^x - e^{2x}}{e^x - e^{-x}}$.

☐ **L2** Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\frac{e^x - e^{2x}}{e^x - e^{-x}}$.

☐ **M14** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $\exp(\cos(x))$ tend vers :

☐ **A** une limite finie non nulle ☒ aucune limite, finie ou non ☐ **C** $+\infty$ ☐ **D** $-\infty$ ☐ **E** 0

☐ **M15** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $\exp(x + \cos(x))$ tend vers :

☐ **A** 0 ☒ $+\infty$ ☐ **C** une limite finie non nulle ☐ **D** $-\infty$ ☐ **E** aucune limite, finie ou non

☐ **R2** Justifier votre réponse à la question **M15**.

☐ **M16** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $(e^{\sqrt{x}})^2 - e^x$ tend vers :

☒ $-\infty$ ☐ **B** une limite finie non nulle ☐ **C** $+\infty$ ☐ **D** aucune limite, finie ou non ☐ **E** 0

☐ **M17** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $\exp(\sqrt{\ln(x)}) - \sqrt{x}$ tend vers :

- ☐ **A** 0 ☒ $-\infty$ ☐ **C** $+\infty$ ☐ **D** une limite finie non nulle ☐ **E** aucune limite, finie ou non

☐ **M18** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $\exp(x(|\cos(x)| + |\sin(x)|))$ tend vers :

- ☐ **A** une limite finie non nulle ☐ **B** $-\infty$ ☐ **C** 0 ☒ $+\infty$ ☐ **E** aucune limite, finie ou non

Exercice 3. Dérivation de fonctions

☐ **M19** La dérivée de la fonction qui à x associe $\frac{2x-3}{x+5}$ est la fonction qui à x associe :

- ☐ **A** $(2x-3)\ln(x+5)$ ☐ **B** $\frac{7}{(x+5)^2}$ ☐ **C** $\frac{2x+7}{(x+5)^2}$ ☒ $\frac{13}{(x+5)^2}$ ☐ **E** $\frac{3x+2}{(x+5)^2}$

☐ **M20** La dérivée de la fonction qui à x associe $(x-5)e^{2x}$ est la fonction qui à x associe :

- ☐ **A** $(x-4)e^{2x}$ ☐ **B** e^{2x} ☒ $(2x-9)e^{2x}$ ☐ **D** $(x-3)e^{2x}$ ☐ **E** $(2x-10)e^{2x}$

☐ **M21** La dérivée de la fonction qui à x associe $\sqrt{x^4+2x}$ est la fonction qui à x associe :

- ☐ **A** aucune des autres réponses proposées ☐ **B** $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^4+2x}}$ ☐ **C** $\frac{1}{2\sqrt{x^4+2x}}$ ☒ $\frac{2x^3+1}{\sqrt{x^4+2x}}$
☐ **E** $\frac{4x^3+1}{\sqrt{x^4+2x}}$

☐ **M22** La dérivée de la fonction qui à x associe e^{-x^2} est la fonction qui à x associe :

- ☐ **A** $-e^{-x^2}$ ☒ $-2xe^{-x^2}$ ☐ **C** $-x^2e^{-x^2}$ ☐ **D** e^{-x^2} ☐ **E** $x^2e^{-x^2}$

☐ **M23** La dérivée de la fonction qui à x associe $\frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ est la fonction qui à x associe :

- ☒ $-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ ☐ **B** $\ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$ ☐ **C** aucune des autres réponses proposées
☐ **D** $-\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ ☐ **E** $\frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)^2}$

□ **M24** La dérivée de la fonction qui à x associe $\ln\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)$ est la fonction qui à x associe :

- ☐ **A** $\frac{1}{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}$
☐ **B** aucune des autres réponses proposées
 ☐ **C** $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$
- ☐ **D** $\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$
☒ $-\frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)(x+2)}$

□ **M25** On dispose d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$. On définit une fonction g par $g(x) = f(f(f(x)))$. Le nombre $g'(1)$ vaut alors :

- ☐ **A** 2
 ☐ **B** 0
 ☐ **C** 4
 ☐ **D** 1
 ☒ 8

△ **L3** Quels sont les points du domaine de définition de $x \mapsto \sqrt{\frac{(x-1)^3(x-2)}{x+1}}$ où cette fonction n'est *pas* dérivable ?

Exercice 4. Équations et inéquations

□ **M26** Le nombre de solutions de l'équation $\ln(2x) = 2 \ln(x)$ d'inconnue x est :

- ☐ A 0 ☐ B 2 ☐ C 4 ☒ 1 ☐ E infini

□ **M27** L'équation $\exp(1 - e^x) = a$ d'inconnue x possède au moins une solution si et seulement si :

- ☐ A $0 < a < 1$ ☒ $0 < a < e$ ☐ C $a \geq e$ ☐ D $0 < a \leq e$ ☐ E $a > e$

□ **M28** On fixe un réel a . L'équation $e^{ax} = e^a e^x$ d'inconnue x :

- ☐ A possède au moins une solution, mais peut en posséder plusieurs selon la valeur prise par a
☐ B possède une infinité de solutions
☐ C possède un nombre fini de solutions, mais peut n'en posséder aucune ou en posséder plusieurs selon la valeur prise par a
☐ D possède exactement une solution
☒ possède au plus une solution, mais peut n'en posséder aucune selon la valeur prise par a

□ **M29** Le nombre de solutions de l'équation $3e^{|x|} = e^x + 1$ d'inconnue réelle x est :

- ☐ A 4 ☐ B 1 ☐ C 2 ☒ 0 ☐ E infini

□ **M30** On pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,6$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0,6$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x+2}{x^2+1} \geq \frac{x}{x^2-1}$ est :

- ☐ A $]-\infty; \beta] \cup [\alpha; +\infty[$
☒ $]-\infty; -1[\cup [\beta; 1[\cup [\alpha; +\infty[$
☐ C $]-\infty; -1[\cup [\alpha; +\infty[$
☐ D $]-\infty; -1[\cup [\beta; 1] \cup [\alpha; +\infty[$
☐ E $]-\infty; -1[\cup [\beta; 1] \cup [\alpha; +\infty[$

□ **M31** Combien l'équation $\sqrt{x} = x - 1$ possède-t-elle de solutions ?

- ☐ A 3 ☐ B 4 ☐ C 2 ☐ D 0 ☒ 1

□ **M32** L'ensemble des solutions de l'inéquation $x + 1 \geq \sqrt{x^2 - 3}$ est :

- ☐ A aucune des autres réponses proposées ☐ B $[-2; +\infty[$ ☐ C $[-1; +\infty[$ ☒ $[\sqrt{3}; +\infty[$
☐ E $]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$

△ **L4** Donner l'ensemble des réels y tels que les solutions de l'inéquation $x^3 - 6\sqrt{x} \geq y$ constituent un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.

□ **M33** Le nombre de solutions de l'équation $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2026} = x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2025}$ d'inconnue réelle x vaut :

- ☐ **A** 2 ☐ **B** 1 ☒ 0 ☐ **D** 2026 ☐ **E** 2025

Une équation polynomiale

On fixe un entier $n \geq 1$. On s'intéresse à la fonction

$$f : x \mapsto x(x-1)(x-2) \cdots (x-n).$$

□ **M34** Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
☒ **B** $f(k + \frac{1}{2})$ a même signe que $(-1)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$
☐ **C** $f(k + \frac{1}{2})$ a même signe que $(-1)^{n+1-k}$ pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$
☐ **D** $f(k + \frac{1}{2})$ a même signe que $(-1)^k$ pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$
☐ **E** $f(k + \frac{1}{2})$ a même signe que $(-1)^{k+1}$ pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$

□ **M35** Parmi les entiers a proposés, quel est le plus petit tel que, quel que soit $n \geq a$ et quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on ait $|f(k + \frac{1}{2})| > 1$?

- ☐ **A** $a = 1$ ☐ **B** $a = 2$ ☒ $a = 4$ ☐ **D** $a = 3$ ☐ **E** $a = 5$

○ **R3** Démontrer que lorsque n est assez grand, l'équation $x(x-1)(x-2) \cdots (x-n) = 1$ possède au moins une solution dans l'intervalle $]k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}[$ quel que soit $k \in \{0; 1; \dots; n\}$. On pourra s'appuyer sur tous les résultats antérieurs corrects.

Exercice 5. Une fonction trigonométrique

On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

où x est exprimé en radians. On note D son domaine de définition.

□ **M36** L'ensemble D est $\mathbb{R} \setminus A$ pour l'ensemble A égal à :

- ☒ l'ensemble des réels de la forme $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
☐ l'ensemble des réels de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
☐ l'ensemble des réels de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
☐ l'ensemble des réels de la forme $\frac{3k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$
☐ l'ensemble des réels de la forme $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

□ **M37** Étant donné x dans $D \cap [0; 2\pi]$, la valeur $f(x)$ est strictement positive si et seulement si x appartient à :

- ☐ $\left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{4}; 2\pi \right]$
☐ $[0; 2\pi]$
☒ $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$
☐ $\left[0; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right]$
☐ $\left[0; \frac{3\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{7\pi}{4}; 2\pi \right]$

□ **M38** Parmi les quatre propriétés suivantes, combien sont vraies ?

- (i) f est 2π -périodique; (ii) f est π -périodique; (iii) f est paire; (iv) f est impaire.

- ☐ aucune ☐ deux ☐ trois ☒ une ☐ quatre

□ **M39** En considérant $\frac{f(x)}{(1 - \sin x)^2}$, on obtient que :

- ☐ $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} f(x) = +\infty$
☐ $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} f(x) = -\infty$
☐ $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} f(x) = -\infty$
☒ $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} f(x) = +\infty$
☐ $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} f(x) = +\infty$

☐ **M40** En considérant à nouveau $\frac{f(x)}{(1 - \sin x)^2}$, on obtient pour la fonction g définie par $g(x) = (x - \frac{3\pi}{2}) f(x)$ que :

- ☐ **A** aucune des autres réponses proposées
- ☐ **B** $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} g(x) = 1$
- ☐ **C** $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} g(x) = 0$
- ☐ **D** $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} g(x) = -\infty$
- ☒ **E** $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} g(x) = +\infty$

☐ **R4** Justifier, dans votre réponse à la question précédente, l'énoncé portant sur la limite de $g(x)$ quand x tend vers $(\frac{3\pi}{2})^+$.

☐ **M41** La fonction f est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition, et pour tout x dans D on a :

- ☐ **A** $f'(x) = \frac{\sin x + \sin^2 x - 2 \cos^2 x}{(1 + \sin x)^3}$
- ☐ **B** $f'(x) = \frac{-\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 + \sin x)^3}$
- ☐ **C** $f'(x) = \frac{-\sin x - 2 \cos^2 x}{(1 + \sin x)^3}$
- ☒ **D** $f'(x) = \frac{\sin x - 2}{(1 + \sin x)^2}$
- ☐ **E** $f'(x) = \frac{-\sin x + \sin^2 x - 2 \cos^2 x}{(1 + \sin x)^3}$

☐ **M42** On s'intéresse aux variations de f sur $D \cap [0; 2\pi]$. La fonction f est :

- ☐ **A** strictement décroissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et strictement croissante sur $]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$
- ☐ **B** strictement décroissante sur $D \cap [0; 2\pi]$
- ☐ **C** strictement croissante sur $]0; \frac{3\pi}{2}[$ et strictement décroissante sur $]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$
- ☒ **D** strictement décroissante sur $]0; \frac{3\pi}{2}[$ et strictement décroissante sur $]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$
- ☐ **E** strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$

- ☐ **M43** On s'intéresse à l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x , selon la valeur du paramètre y . Laquelle des affirmations suivantes est vraie?
- ☒ Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution dans D , et il existe exactement une valeur de y pour laquelle l'équation possède plusieurs solutions dans $D \cap [0; 2\pi]$
- ☐ **B** Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution dans D , et il existe plusieurs valeurs de y pour lesquelles l'équation possède plusieurs solutions dans $D \cap [0; 2\pi]$
- ☐ **C** Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ possède exactement une solution dans $D \cap [0; 2\pi]$
- ☐ **D** Il existe une infinité de $y \in \mathbb{R}$ tels que l'équation $f(x) = y$ ne possède aucune solution dans $D \cap [0; 2\pi]$
- ☐ **E** Il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $f(x) = y$ ne possède aucune solution dans D , mais il n'y a qu'un nombre fini de tels y

Exercice 6. Étude d'une fonction à paramètre

Étant donné un réel a , on considère la fonction f_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par l'expression

$$f_a(x) = \frac{x - a}{x^2 + 1}.$$

L'objectif est d'étudier, en fonction de a , l'existence d'un maximum et d'un minimum pour f_a , ainsi que les points où ils seraient éventuellement atteints.

Généralités

- ☐ **M44** La limite de f_a en $+\infty$:
- ☐ **A** vaut $+\infty$ ☐ **B** dépend de a ☐ **C** vaut $-\infty$ ☒ vaut 0 ☐ **E** vaut 1
- ☐ **M45** La fonction f_a :
- ☐ **A** n'est jamais paire, et jamais impaire
- ☐ **B** est impaire pour plusieurs valeurs possibles de a
- ☐ **C** est paire pour plusieurs valeurs possibles de a
- ☒ est impaire si et seulement si $a = 0$
- ☐ **E** est paire si et seulement si $a = 0$

□ **M46** La fonction f_0 prend sa valeur maximale uniquement en x_0 , et sa valeur est maximale est M , pour $(x_0; M)$ égal à :

□ **A** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

□ **B** Aucune des autres réponses proposées

■ $\left(1; \frac{1}{2}\right)$

□ **D** $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

□ **E** $(-1; 1)$

□ **M47** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

□ **A** Quel que soit le réel x , la fonction $a \mapsto f'_a(x)$ est affine et strictement décroissante

□ **B** Quel que soit le réel x , la fonction $a \mapsto f'_a(x)$ est affine et strictement croissante

■ Quel que soit le réel x , la fonction $a \mapsto f'_a(x)$ est affine, mais son sens de variation dépend de x

□ **D** Il n'existe aucun réel x tel que $a \mapsto f'_a(x)$ soit affine

□ **E** Il existe des réels x tels que $a \mapsto f'_a(x)$ soit affine, et d'autres pour lesquels elle ne l'est pas

Sens de variation

△ **L5** Donner une expression simplifiée de la fonction dérivée f'_a .

On admet dans la suite que le signe de f'_a se présente comme suit : il existe des nombres réels s_a et t_a vérifiant l'inégalité $s_a < t_a$ et tels que :

- $f'_a(x) < 0$ quel que soit $x \in]-\infty; s_a[\cup]t_a; +\infty[$;
- $f'_a(x) > 0$ quel que soit $x \in]s_a; t_a[$.
- $f'_a(s_a) = 0$ et $f'_a(t_a) = 0$.

*Il ne sera en particulier pas indispensable de calculer explicitement s_a et t_a pour répondre aux questions **M48** à **M52** ainsi qu'à la question **R5**.*

□ **M48** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

□ **A** f_a n'admet ni maximum ni minimum

□ **B** f_a admet un minimum mais pas de maximum

■ f_a admet un maximum et un minimum

□ **D** f_a admet un maximum mais pas de minimum

△ **L6** Pour combien de valeurs de y l'équation $f_a(x) = y$, d'inconnue x , possède-t-elle une unique solution ? Si le

nombre dépend de a , on le précisera dans la réponse.

On note dans la suite $M_a = f_a(t_a)$ et $m_a = f_a(s_a)$.

□ **M49** Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** On a toujours $m_a > 0$, mais la validité de l'inégalité $0 > M_a$ dépend de la valeur de a
- ☒ On a toujours $m_a < 0 < M_a$
- ☐ **C** On a toujours $M_a < 0 < m_a$
- ☐ **D** On a toujours $0 < M_a$, mais la validité de l'inégalité $m_a < 0$ dépend de la valeur de a
- ☐ **E** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

□ **M50** Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** $f'_a(0) < 0$ quel que soit le réel a
- ☐ **B** $f'_a(0) > 0$ pour certaines valeurs de a , mais $f'_a(0) < 0$ pour d'autres
- ☒ $f'_a(0) > 0$ quel que soit le réel a

□ **M51** Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **B** On a toujours $s_a < 0$, mais la validité de l'inégalité $0 < t_a$ dépend de la valeur de a
- ☒ On a toujours $s_a < 0 < t_a$
- ☐ **D** On a toujours $0 < t_a$, mais la validité de l'inégalité $s_a < 0$ dépend de la valeur de a

□ **M52** Quelle affirmation est vraie ? On pourra comparer $f_a(x)$ à $f_b(x)$ pour $a < b$ et x quelconque.

- ☒ Les fonctions $a \mapsto M_a$ et $a \mapsto m_a$ sont toutes les deux décroissantes
- ☐ **B** La fonction $a \mapsto M_a$ est décroissante, et la fonction $a \mapsto m_a$ est croissante
- ☐ **C** Les fonctions $a \mapsto M_a$ et $a \mapsto m_a$ sont toutes les deux croissantes
- ☐ **D** La fonction $a \mapsto M_a$ est croissante, et la fonction $a \mapsto m_a$ est décroissante
- ☐ **E** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

△ **R5** Justifier le sens de variations de $a \mapsto M_a$ obtenu à la question précédente.

Les deux questions qui suivent nécessitent un calcul explicite de s_a et t_a .

△ **L7** Donner une expression simple, en fonction de a , de la différence $t_a - s_a$.

□ **M53** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ **A** La fonction $a \mapsto t_a - s_a$ est croissante et tend vers une limite finie en $+\infty$
- ☐ **B** La fonction $a \mapsto t_a - s_a$ est décroissante et tend vers une limite finie non nulle en $+\infty$
- ☐ **C** La fonction $a \mapsto t_a - s_a$ est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$
- ☒ La fonction $a \mapsto t_a - s_a$ n'est pas monotone
- ☐ **E** La fonction $a \mapsto t_a - s_a$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$

Seconde approche des extrema

On fixe un réel λ et on s'intéresse à l'équation $\lambda f_a(x) = 1$ d'inconnue x .

□ **M54** Les réels λ pour lesquels l'équation $\lambda f_a(x) = 1$ d'inconnue x possède une unique solution réelle sont :

- ☐ **A** $a + 2\sqrt{a^2 + 1}$ et $a - 2\sqrt{a^2 + 1}$
- ☐ **B** $-a + \sqrt{a^2 + 1}$ et $-a - \sqrt{a^2 + 1}$
- ☒ $2a + 2\sqrt{a^2 + 1}$ et $2a - 2\sqrt{a^2 + 1}$
- ☐ **D** $-2a + 2\sqrt{a^2 + 1}$ et $-2a - 2\sqrt{a^2 + 1}$
- ☐ **E** $a + \sqrt{a^2 + 1}$ et $a - \sqrt{a^2 + 1}$

□ **M55** La fonction $a \mapsto M_a m_a$ est :

- ☐ **A** constante de valeur 1
- ☐ **B** constante de valeur $\frac{1}{4}$
- ☐ **C** non constante
- ☐ **D** constante de valeur -1
- ☒ constante de valeur $-\frac{1}{4}$

□ **M56** Sur $[0; +\infty[$, la fonction $a \mapsto M_a - m_a$:

- ☐ **A** n'est pas monotone
- ☒ est strictement croissante, de limite $+\infty$ en $+\infty$
- ☐ **C** est strictement décroissante, de limite non nulle en $+\infty$
- ☐ **D** est strictement croissante, de limite finie non nulle en $+\infty$
- ☐ **E** est strictement décroissante, de limite 0 en $+\infty$

- ☐ **M57** Sur $]-\infty; 0]$, la fonction $a \mapsto M_a - m_a$:
- ☐ **A** est strictement croissante, de limite $-\infty$ en $-\infty$
- ☒ est strictement décroissante, de limite $+\infty$ en $-\infty$
- ☐ **C** est strictement croissante, de limite finie non nulle en $-\infty$
- ☐ **D** est strictement décroissante, de limite 0 en $-\infty$
- ☐ **E** n'est pas monotone
-

Exercice 7. Un sac de billes

Un sac contient 10 billes, dont 3 bleues, 2 vertes et 5 rouges.

Règles A

On effectue des tirages dans le sac, en tirant aléatoirement une bille, puis en la remettant dans le sac (une fois qu'on l'a sortie et qu'on a pris connaissance de sa couleur). Les tirages sont indépendants les uns des autres.

- ☐ **M58** On effectue 3 tirages. La probabilité que les trois billes tirées soient de la même couleur est :

☐ **A** 10% ☒ 16% ☐ **C** 33% ☐ **D** 23% ☐ **E** 15%

- ☐ **M59** On effectue 3 tirages. La probabilité, sachant que les trois billes tirées sont de la même couleur, qu'elles soient toutes rouges est, à 1% près :

☐ **A** 71% ☐ **B** 50% ☐ **C** 73% ☒ 78% ☐ **E** 75%

- ☐ **M60** On effectue 3 tirages. La probabilité de tirer exactement deux billes bleues est, à 1% près :

☐ **A** 6% ☐ **B** 16% ☐ **C** 20% ☐ **D** 38% ☒ 19%

- ☐ **M61** On effectue 3 tirages. La probabilité de tirer une bille de chaque couleur est, à 1% près :

☐ **A** 20% ☒ 18% ☐ **C** 50% ☐ **D** 3% ☐ **E** 9%

- ☐ **M62** On effectue 3 tirages. La probabilité de tirer (strictement) plus de billes rouges que de billes bleues est, à 1% près :

☒ 56% ☐ **B** 50% ☐ **C** 45% ☐ **D** 63% ☐ **E** 49%

□ **M63** On effectue n tirages. Quelle est la plus petite valeur de n telle que la probabilité de tirer au moins une bille bleue excède 90% ?

- ☐ 7
 ☐ 8
 ☐ 10
 ☐ 11
 ☐ 9

△ **L8** Le nombre de tirages est illimité. Quelle est la probabilité que, la première fois qu'on tire une bille bleue, on n'ait pas tiré de bille rouge précédemment ?

□ **M64** On effectue n tirages, avec $n \geq 3$. La probabilité de ne pas tirer une bille de chaque couleur vaut alors :

- ☐ $(0,8)^n + (0,7)^n - (0,2)^n - (0,3)^n$
☐ $(0,8)^n - (0,7)^n - (0,2)^n + (0,3)^n$
☐ $(0,2)^n + (0,3)^n + (0,5)^n$
☐ $(0,5)^n + (0,8)^n + (0,7)^n$
☐ $1 - (0,2)^n - (0,3)^n - (0,5)^n$

Règles B

On change les règles. Dorénavant, à chaque étape la bille tirée est retirée définitivement si elle est verte, mais est remise dans le sac si elle est bleue ou rouge. Les tirages restent indépendants les uns des autres.

□ **M65** On effectue 2 tirages. La probabilité de tirer au moins une bille rouge est alors, à 1% près :

- ☐ 78%
 ☐ 76%
 ☐ 80%
 ☐ 50%
 ☐ 75%

□ **M66** On effectue 10 tirages. Soit $k \in \{1; 2; \dots; 10\}$. La probabilité de tirer exactement une bille verte et que cette bille ait été obtenue au k -ième tirage vaut :

- ☐ $\frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^9$
 ☐ $\frac{1}{4} \left(\frac{8}{9}\right)^{10} \left(\frac{9}{10}\right)^k$
☐ $\frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^k$
☐ $\frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$
☐ $\left(\frac{8}{9}\right)^{10} \left(\frac{9}{10}\right)^k$

□ **M67** On effectue 10 tirages. La probabilité de tirer exactement une bille verte s'écrit $C(a^{10} - b^{10})$, où :

- ☐ $C = 1, a = \frac{8}{9}$ et $b = \frac{4}{5}$
☐ $C = \frac{5}{2}, a = \frac{8}{9}$ et $b = \frac{4}{5}$
☐ $C = 1, a = 1$ et $b = \frac{4}{5}$
☐ $C = 4, a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{3}{4}$
☐ $C = \frac{9}{4}, a = \frac{8}{9}$ et $b = \frac{4}{5}$

△ **R6** Justifier votre réponse à la question **M67**. On pourra s'appuyer sur les résultats antérieurs acquis.

CORRECTION

△ **L9** On effectue 10 tirages. Donner l'espérance du nombre total de billes vertes tirées.

Exercice 8. Fonctions modifiant les décimales

On note p la fonction qui à un élément n de $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$ associe n si n est impair ou nul, et $n - 1$ si n est pair et non nul. Par exemple $p(6) = 5$, $p(3) = 3$ et $p(0) = 0$.

On définit deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à partir du développement décimal illimité propre (à savoir qu'on interdit, pour les nombres décimaux, les développements décimaux où tous les chiffres sont égaux à 9 à partir d'un certain rang) : pour tout réel x , dont les décimales après la virgule sont $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$:

- le nombre $f(x)$ est le réel ayant même signe que x , mêmes chiffres avant la virgule que x , et pour chiffres après la virgule $a_2, a_1, a_4, a_3, \dots, a_{2n}, a_{2n-1}, a_{2n+2}, a_{2n+1}, \dots$
- Le nombre $g(x)$ est le réel ayant même signe que x , mêmes chiffres avant la virgule que x , et pour chiffres après la virgule $p(a_1), p(a_2), p(a_3), \dots, p(a_n), \dots$

Par exemple, $f(2,365) = 2,6305$, $g(2,365) = 2,355$, $f(-52,01) = -52,1$ et $g(-354,12) = -354,11$.

□ **M68** Parmi les quatre égalités suivantes, combien sont vraies quel que soit le réel x ?

$$(i) f(f(x)) = x; \quad (ii) g(g(x)) = g(x); \quad (iii) g(f(x)) = f(g(x)); \quad (iv) g(f(x)) = x.$$

☐ A aucune ☐ B quatre ☐ C une ☒ trois ☐ E deux

□ **M69** Parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont vraies ?

- (i) Pour tout réel y , l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution ;
- (ii) Pour tout réel y , l'équation $f(x) = y$ possède exactement une solution ;
- (iii) Pour tout réel y , l'équation $g(x) = y$ possède au moins une solution ;
- (iv) Pour tout réel y , l'équation $g(x) = y$ possède exactement une solution.

☐ A (i) ☐ B aucune ☐ C (iii) et (iv) ☒ (i) et (ii) ☐ E (i), (ii) et (iii)

□ **M70** Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

- ☐ A f est impaire mais g n'est ni paire ni impaire
- ☐ B f est impaire et g est paire
- ☐ C g est impaire mais f n'est ni paire ni impaire
- ☐ D f n'est ni paire ni impaire, et g n'est ni paire ni impaire
- ☒ f et g sont impaires

□ **M71** Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

- ☐ **A** g est croissante et f est décroissante
☐ **B** f est croissante mais g n'est pas croissante
☐ **C** f et g sont croissantes
☒ **D** Ni f ni g n'est monotone
☐ **E** g est croissante mais f n'est pas monotone

□ **M72** Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

- ☐ **A** Aucune des fonctions f et g ne tend vers $+\infty$ en $+\infty$
☐ **B** f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, mais pas g
☒ **C** f et g tendent vers $+\infty$ en $+\infty$
☐ **D** g tend vers $+\infty$ en $+\infty$, mais pas f

□ **M73** Parmi les deux égalités suivantes, lesquelles sont vraies quel que soit le réel x ?

$$(i) f(x+1) = f(x) + 1; \quad (ii) g(x+1) = g(x) + 1.$$

- ☐ **A** (i) mais pas (ii) ☐ **B** les deux ☐ **C** (ii) mais pas (i) ☒ **D** aucune

Points de continuité

Soit une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et un réel x . On dit que :

- F est **continue à droite** en x lorsque pour toute suite décroissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x , la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(x)$;
- F est **continue à gauche** en x lorsque pour toute suite croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x , la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(x)$.

□ **M74** Parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies, laquelle est la plus précise ?

- ☐ **A** La fonction f est continue à droite et à gauche en tout réel positif ou nul
☒ **B** La fonction f est continue à droite en tout réel positif ou nul, et continue à gauche en tout réel positif non décimal
☐ **C** La fonction f est continue à droite en tout réel positif ou nul, continue à gauche en tout réel positif non décimal, mais n'est continue à gauche en aucun nombre décimal positif ou nul
☐ **D** Aucune des autres affirmations n'est vraie
☐ **E** La fonction f est continue à droite en tout réel positif ou nul, continue à gauche en tout réel positif non décimal, mais n'est continue à gauche en aucun nombre décimal strictement positif

CORRECTION

□ **M75** Parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies, laquelle est la plus précise ?

- ☐ **A** La fonction g est continue à droite en tout réel positif ou nul, continue à gauche en tout réel positif non décimal, mais n'est continue à gauche en aucun nombre décimal positif ou nul
- ☐ **B** Aucune des autres affirmations n'est vraie
- ☐ **C** La fonction g est continue à droite en tout réel positif ou nul, continue à gauche en tout réel positif non décimal, mais n'est continue à gauche en aucun nombre décimal positif ou nul
- ☒ **D** La fonction g est continue à droite en tout réel positif ou nul, et continue à gauche en tout réel positif non décimal
- ☐ **E** La fonction g est continue à droite et à gauche en tout réel positif ou nul