TeSciA

2022

Mathématiques Générales Avancées

Épreuve 2, Option B

19 mars 2022

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ◯ ◯ ●

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Nombres réels

☐ **M1** L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $\frac{2}{x-1} < \frac{4}{x-1} + 2$ est :

$\boxed{\text{A}}$ $]0, +\infty[$

$\boxed{\text{B}}$ aucune des autres réponses proposées

$\boxed{\text{C}}$ $]1, +\infty[$

$\boxed{\text{D}}$ $]2, +\infty[$

■ $]-\infty, 0[\, \cup \,]1, +\infty[$

☐ **M2** Pour que l'équation $e^{2x} - e^x = m$ possède exactement deux solutions, il faut et il suffit que m appartienne à :

■ $]-\frac{1}{4}, 0[$ $\boxed{\text{B}}$ $]-\frac{1}{4}, 0]$ $\boxed{\text{C}}$ $]-\frac{1}{4}, 1]$ $\boxed{\text{D}}$ $[-\frac{1}{4}, 1]$ $\boxed{\text{E}}$ $[-\frac{1}{4}, +\infty[$

☐ **M3** Le nombre de solutions de l'équation $\ln\big(x - \sqrt{x} - 1\big) = 2$ d'inconnue x réelle est égal à :

■ 1 $\boxed{\text{B}}$ 0 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ 2

☐ **M4** Pour deux réels x et y, la condition $|x+y| = \big||x| - |y|\big|$ est équivalente à la condition :

$\boxed{\text{A}}$ $xy \geqslant 0$

■ $xy \leqslant 0$

$\boxed{\text{C}}$ $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

$\boxed{\text{D}}$ aucune des conditions citées

$\boxed{\text{E}}$ $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$

△ **L1** Donner deux entiers a et b tels que $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = a + b\sqrt{2}$.

△ **L2** Donner, pour x réel positif, une expression simplifiée de $A(x) = \sqrt{x+1+2\sqrt{x}} + \sqrt{x+1-2\sqrt{x}}$.

△ **L3** Donner sans justification les solutions de l'équation $3\,|2-x| + 2\,|5-x| = 7$.

◯ **R1** Pour un nombre réel x, on note $E(x)$ l'unique entier relatif k tel que $k \leqslant E(x) < k+1$. Soit n et p des entiers relatifs. Montrer que

$$E\left(\frac{n+p}{2}\right) + E\left(\frac{n-p+1}{2}\right) = n.$$

Exercice 2. Généralités sur les suites

☐ **M5** Soit a et b deux nombres réels. On suppose que $a < b + \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Alors :

■ $a \leqslant b$ [B] $a < b$ [C] $a = 0$ [D] On ne peut rien dire   [E] $a = b$

△ **L4** Donner, sans justification, un exemple de suite bornée qui est divergente.

△ **L5** Donner, sans justification, la limite de la suite $\left(\frac{\cos(n)}{n}\right)_n$.

Vrai ou faux ?

☐ **M6** Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $((u_n)^2)_n$ est majorée, alors $(u_n)_n$ converge.

[A] Faux   ■ Vrai

☐ **M7** Si une suite $(u_n)_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$

[A] Faux   ■ Vrai

☐ **M8** Si une suite réelle $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.

■ Faux   [B] Vrai

☐ **M9** Si une suite réelle $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors il existe une infinité d'entiers n tels que $u_{n+1} > u_n$.

[A] Faux   ■ Vrai

◯ **R2** Justifier votre réponse à la question **M9**.

Exercice 3. Étude d'une suite

On considère dans cet exercice la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par les conditions :

- $u_1 = 1$;
- $u_{n+1} = \sqrt{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\, u_n$ pour tout entier naturel n.

☐ **M10** La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$:

[redacted] est croissante — B n'est ni croissante ni décroissante — C est décroissante

☐ **M11** L'affirmation « quand n tend vers $+\infty$, u_n est géométrique » :

A est vraie — B est fausse — [redacted] est dénuée de sens

☐ **M12** L'affirmation « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \sqrt{2}\,u_n$ » :

A est vraie — B est fausse — [redacted] est dénuée de sens

☐ **M13** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

A $u_{n+1} \leqslant (\sqrt{2})^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$

B $(\sqrt{2})^n \leqslant u_n \leqslant 2^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$

[redacted] $(\sqrt{2})^n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

D $u_{n+1} \geqslant 2^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

E Aucune des autres affirmations n'est vraie

☐ **M14** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

A La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas et ne tend pas vers $+\infty$

B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

[redacted] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$

E La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ a une limite qui n'est pas l'une des valeurs proposées dans les autres réponses

☐ **M15** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

[redacted] La suite $\left(\dfrac{(u_n)^2}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique

B La suite $\left(n(u_n)^2\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique

C La suite $\left(\dfrac{(u_n)^2}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique

D La suite $\left((1+\frac{1}{n})(u_n)^2\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique

E La suite $\left((u_n)^2\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique

□ **M16** Pour tout entier $n \geqslant 1$, le terme u_n vaut :

A $n\sqrt{2^n}$ B $n\sqrt{2^{n-1}}$ ■ $\sqrt{n\,2^{n-1}}$ D $\sqrt{(1+\frac{1}{n})\,2^n}$ E $\sqrt{n\,2^n}$

△ **L6** Donner sans justification la limite de $\dfrac{u_n}{(\sqrt{2})^n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Mots

Dans cet exercice, on appelle *mot* toute suite finie de 0 et de 1 contenant au moins un chiffre. Par exemple, 11010, 001011 et 00 sont des mots. La longueur d'un mot est alors le nombre de chiffres le constituant : les mots précédents sont de longueurs respectives 5, 6 et 2.

Si u et v sont deux mots, on note $u - v$ le mot obtenu en juxtaposant à la suite de u les chiffres du mot v. Par exemple, si $u = 1101$ et $v = 10001$, alors $u - v = 110110001$.

Si u est un mot, on note $\widehat{u}$ le mot obtenu en inversant l'ordre des chiffres de u. Par exemple, si $u = 1100101$, alors $\widehat{u} = 1010011$. On dit qu'un mot u est un **palindrome** lorsque $u = \widehat{u}$. Par exemple, le mot 1101011 est un palindrome.

Exemples

Dans les questions **M17** à **M19**, on prend $u = 0101$ et $v = 101101$.

☐ **M17** Vrai ou faux ? Le mot u est un palindrome.

[A] Vrai ■ Faux

☐ **M18** Vrai ou faux ? Le mot v est un palindrome.

[A] Faux ■ Vrai

△ **L7** Écrire le mot $u - v$.

☐ **M19** Vrai ou faux ? Le mot $u - v$ est un palindrome.

■ Faux [B] Vrai

☐ **M20** Soit u et v deux mots. Le mot $\widehat{u - v}$ est systématiquement égal à :

■ $\widehat{v} - \widehat{u}$ [B] $\widehat{u} - \widehat{v}$ [C] $v - \widehat{u}$ [D] $\widehat{u} - v$ [E] $\widehat{v} - u$

☐ **M21** Soit u un *palindrome*. La propriété « le mot $u - u$ est un palindrome » est :

■ toujours vraie

[B] toujours fausse

[C] vraie pour certains palindromes u mais pas tous

☐ **M22** Soit u et v deux *palindromes*. La propriété « le mot $u - v$ est un palindrome » est :

■ vraie pour certains palindromes u et v mais pas tous

B toujours fausse

C toujours vraie

☐ **M23** La propriété « le mot $u - v - u$ est un palindrome » est :

A vraie pour certains palindromes u et v mais pas tous

B vraie pour n'importe quels mots u et v

C fausse lorsque u et v sont des palindromes, mais vraie pour certains autres mots u et v qui ne sont pas des palindromes

■ vraie lorsque u et v sont des palindromes, et uniquement dans ce cas

E vraie lorsque u et v sont des palindromes, mais aussi pour certains mots u et v qui ne sont pas des palindromes

Anti-mots

Étant donné un mot u, on note $\overline{u}$ le mot obtenu en remplaçant tous les "1" de u par des "0", et tous les "0" de u par des "1". Par exemple, si $u = 1100101$, alors $\overline{u} = 0011010$.

On dit qu'un mot u est un **anti-mot** lorsque $\widehat{u} = \overline{u}$. Par exemple :

- le mot $u = 001011$ est un anti-mot car $\widehat{u} = 110100$ et $\overline{u} = 110100$, et ainsi $\widehat{u} = \overline{u}$;
- le mot $u = 001101$ n'est pas un anti-mot car $\widehat{u} = 101100$ et $\overline{u} = 110010$, et ainsi $\widehat{u} \neq \overline{u}$.

☐ **M24** Lequel des mots suivants est un anti-mot ?

A 1011100 B 011 ■ 101010 D 1001 E 1

☐ **M25** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

■ Aucun mot u ne vérifie $\overline{u} = u$

B Tous les mots u vérifient $\overline{u} = u$

C Certains mots u vérifient $\overline{u} = u$, mais pas tous

☐ **M26** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A Certains palindromes sont des anti-mots, mais pas tous

■ Aucun palindrome n'est un anti-mot

C Tous les palindromes sont des anti-mots

☐ **M27** La propriété « $\overline{u}$ est un palindrome » est :

[A] vraie lorsque u est un palindrome, mais aussi pour certains mots u qui ne sont pas des palindromes

[B] vraie pour n'importe quel mot u

■ vraie lorsque u est un palindrome, et uniquement dans ce cas

[D] fausse lorsque u est un palindrome, mais vraie pour certains mots u qui ne sont pas des palindromes

[E] vraie pour certains palindromes u mais pas tous

☐ **M28** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

[A] Si u est un anti-mot, alors les mots $\overline{u}$ et $\widehat{u}$ peuvent être des anti-mots, mais il y a des exemples d'anti-mots u pour lesquels ce n'est pas le cas

[B] Si u est un anti-mot, alors les mots $\overline{u}$ et $\widehat{u}$ ne sont pas des anti-mots

■ Si u est un anti-mot, alors les mots $\overline{u}$ et $\widehat{u}$ sont nécessairement des anti-mots

◯ **R3** Soit u un mot de longueur ***paire***. Démontrer que u est un anti-mot si et seulement s'il existe un mot v tel que $u = v - \widehat{\overline{v}}$.

Nombre de 1

Étant donné un mot u de longueur n ainsi qu'un entier k compris entre 1 et n, on note $s_k(u)$ le nombre d'occurrences du chiffre 1 parmi les k premiers chiffres de u. Par convention, si $k = 0$, on pose $s_0(u) = 0$. Par exemple, pour le mot $u = 11010$:

- On a $s_0(u) = 0$ par convention ;
- Le premier chiffre de u est 1, donc $s_1(u) = 1$;
- Les deux premiers chiffres de u sont $1, 1$, donc $s_2(u) = 2$;
- Les trois premiers chiffres de u sont $1, 1, 0$, donc $s_3(u) = 2$;
- Les quatre premiers chiffres de u sont $1, 1, 0, 1$, donc $s_4(u) = 3$;
- Les cinq premiers chiffres de u sont $1, 1, 0, 1, 0$, donc $s_5(u) = 3$.

☐ **M29** Le nombre $s_4(00101111)$ vaut :

■ 1 [B] 2 [C] 4 [D] 0 [E] 5

☐ **M30** Soit u un mot de longueur n. Si k est un entier compris entre 1 et n, alors le k-ième chiffre du mot u vaut :

[A] $s_k(u)$ [B] $s_{k-1}(u)$ [C] $s_{k+1}(u)$ [D] $s_{k+1}(u) - s_k(u)$ ■ $s_k(u) - s_{k-1}(u)$

☐ **M31** Soit u et v deux mots de même longueur n. L'affirmation « si $s_k(u) = s_k(v)$ pour tout entier k compris entre 1 et n, alors $u = v$ » est :

- [A] vraie pour certains choix de u, v et n, fausse pour d'autres
- ■ systématiquement vraie
- [C] systématiquement fausse

☐ **M32** Soit u un mot de longueur n, et k un entier compris entre 1 et n. Alors $s_k(\overline{u})$ est égal à :

[A] $s_n(u) - s_k(u)$ [B] $n - s_k(u)$ ■ $k - s_k(u)$ [D] $k - s_{n-k}(u)$ [E] $s_n(u) - s_{n-k}(u)$

☐ **M33** Soit u un mot de longueur n, et k un entier compris entre 1 et n. Alors $s_k(\widehat{u})$ est égal à :

- [A] $k - s_k(u)$
- [B] $n - s_{n-k}(u)$
- [C] $k - s_{n-k}(u)$
- [D] $s_n(u) - s_k(u)$
- ■ $s_n(u) - s_{n-k}(u)$

Exercice 5. Rationnels et irrationnels

Un nombre réel x est dit **rationnel** lorsqu'il existe des entiers relatifs p et q, avec q non nul, tels que $x = \dfrac{p}{q}\cdot$ Dans le cas contraire x est dit **irrationnel**. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres irrationnels est donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On admettra que π et e (base du logarithme népérien) sont irrationnels, de même que $\sqrt{n}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ qui n'est pas le carré d'un entier.

☐ **M34** Parmi les nombres

$$a = \sqrt{5}, \quad b = 1,000000005 \quad , \quad c = -4 \quad \text{et} \quad d = \frac{2}{1/3},$$

lesquels sont rationnels ?

[A] c et d [B] Aucun [C] Tous ■ b, c et d [E] b et c

☐ **M35** Vrai ou faux ? La somme et le produit de deux nombres rationnels sont toujours rationnels.

[A] Faux ■ Vrai

☐ **M36** Soit x un rationnel et y un irrationnel. L'affirmation « $x + y$ est irrationnel » est :

■ vraie quel que soit le choix de x et y

[B] vraie pour au moins un choix de x et y, fausse pour au moins un autre

[C] fausse quel que soit le choix de x et y

△ **R4** Justifiez brièvement votre réponse à la question **M36**.

☐ **M37** Soit x un rationnel et y un irrationnel. L'affirmation « xy est irrationnel » est :

■ vraie pour au moins un choix de x et y, fausse pour au moins un autre

[B] fausse quel que soit le choix de x et y

[C] vraie quel que soit le choix de x et y

△ **L8** Parmi les nombres

$$a = \sqrt{256}, \quad b = \frac{\pi}{6}, \quad c = \sin\frac{\pi}{6}, \quad d = \sqrt{\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad f = \sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{2},$$

indiquer sans justification lesquels sont irrationnels.

☐ **M38** Vrai ou faux ? La suite $\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)_n$ converge vers 0.

[A] Faux [B] L'affirmation n'a pas de sens ■ Vrai

☐ **M39** Vrai ou faux ? Il existe une suite de nombres irrationnels qui converge vers 0.

■ Vrai   [B] Faux   [C] L'affirmation n'a pas de sens

☐ **M40** Vrai ou faux ? La limite d'une suite convergente de nombres rationnels est toujours un nombre rationnel.

[A] Vrai   ■ Faux

☐ **M41** Soit $x \in [0,1[$ donné par son développement décimal illimité $x = 0, x_1x_2x_3 \dots x_n \dots$ Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le nombre $u_n = 0, x_1x_2x_3 \dots x_n000000000\dots$, définissant ainsi une suite u.

■ La suite u converge vers x

[B] La suite u tend vers x sauf s'il y a une infinité de 9 parmi les x_n

[C] La suite u diverge si x est rationnel

[D] La suite u peut converger vers un nombre réel autre que x

[E] La suite u diverge si x est irrationnel

☐ **M42** Soit $x \in [0,1[$. Alors :

■ x est limite d'une suite de nombre rationnels

[B] Les autres propositions n'ont pas de sens

[C] x est limite d'une suite de nombres rationnels si et seulement s'il est lui-même rationnel

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

- $f(0) = 0$;
- $f(x) = 1$ pour tout rationnel non nul x ;
- $f(x) = 0$ pour tout irrationnel x.

☐ **M43** On considère le raisonnement suivant :

« 0 est limite d'une suite d'irrationnels. Or f est nulle en tout irrationnel. Donc f est continue en 0. »

Ce raisonnement est :

[A] correct   ■ incorrect

△ **R5** Justifiez votre réponse à la question **M43**.

☐ **M44** Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

[A] La fonction f est continue

[B] La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{Q}$, et seulement en ces points

[C] La fonction f est continue en 0, et seulement en 0

[D] La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et seulement en ces points

■ Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **M45** On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xf(x)$. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

[A] La fonction g est continue en tout point de $\mathbb{Q}$, et seulement en ces points

[B] La fonction g est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et seulement en ces points

■ La fonction g est continue en 0, et seulement en 0

[D] La fonction g est continue

[E] Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **M46** On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

- $h(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$;
- $h(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel non entier écrit sous forme irréductible (avec donc $q \geqslant 2$, et p et q sans diviseur positif commun autre que 1) ;
- $h(x) = 0$ si x est irrationnel.

Par exemple, $h(\sqrt{2}) = 0$, $h(1) = 0$, et $h(\frac{2}{3}) = h(\frac{4}{6}) = \frac{1}{3}$.

On introduit des propriétés éventuelles de h :

(a) pour tout x réel, $h(x+1) = h(x)$;

(b) l'ensemble des valeurs prises par h est un intervalle ;

(c) la fonction h est continue en 0 ;

(d) la fonction h est continue en $\frac{1}{2}$;

(e) la fonction h tend vers 0 en $+\infty$.

Lesquelles de ces cinq propriétés sont vraies ?

[A] (a) et (d) [B] (c) et (e) [C] (a), (b) et (c) [D] (b), (d) et (e) ■ (a) et (c)

Exercice 6. Logique

Vous êtes perdu sur une piste dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation : de cette bifurcation partent deux pistes, une vers la gauche et une vers la droite. Chacune de ces pistes peut conduire à une oasis ou se perdre dans le désert.

À côté de la bifurcation se tiennent trois sphinx.

Chaque sphinx vous donne une affirmation :

Sphinx 1 : « Une au moins des deux pistes mène à une oasis. »

Sphinx 2 : « La piste de droite se perd dans le désert. »

Sphinx 3 : « Si la piste de gauche se perd dans le désert alors celle de droite mène à une oasis. »

Pour les questions **M47** et **M48**, on suppose que la proposition suivante est vraie :

Proposition A : Les trois sphinx disent la vérité.

☐ **M47** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

■ Dans le désert

B À une oasis

C La proposition A est absurde

D Les deux sont possibles

☐ **M48** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Dans le désert

B Les deux sont possibles

■ À une oasis

D La proposition A est absurde

Pour les questions **M49** et **M50**, on suppose que la proposition suivante est vraie :

Proposition B : Le sphinx 1 ment, mais chacun des autres peut mentir ou dire la vérité.

☐ **M49** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

■ Dans le désert

B Les deux sont possibles

C À une oasis

D La proposition B est absurde

☐ **M50** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

■ Dans le désert

B La proposition B est absurde

C Les deux sont possibles

D À une oasis

Pour les questions **M51** et **M52**, on suppose que la proposition suivante est vraie :
Proposition C : Le sphinx 2 ment, mais chacun des autres peut mentir ou dire la vérité.

☐ **M51** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Les deux sont possibles

B Dans le désert

C La proposition C est absurde

■ À une oasis

☐ **M52** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Dans le désert

■ Les deux sont possibles

C À une oasis

D La proposition C est absurde

Pour les questions **M53** et **M54**, on suppose que la proposition suivante est vraie :

Proposition D : Le sphinx 3 ment, mais chacun des autres peut mentir ou dire la vérité.

☐ **M53** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A La proposition D est absurde

B Les deux sont possibles

■ Dans le désert

D À une oasis

☐ **M54** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Les deux sont possibles

B La proposition D est absurde

■ Dans le désert

D À une oasis

Pour les questions **M55** et **M56**, on suppose que la proposition suivante est vraie :

Proposition E : Les trois sphinx mentent.

☐ **M55** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Les deux sont possibles

B Dans le désert

■ La proposition E est absurde

D À une oasis

☐ **M56** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Les deux sont possibles

B Dans le désert

■ La proposition E est absurde

D À une oasis

Pour les questions **M57** et **M58**, on suppose que la proposition suivante est vraie :

Proposition F : Seul un des trois sphinx dit la vérité.

☐ **M57** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

- A La proposition F est absurde
- B À une oasis
- C Les deux sont possibles
- ■ Dans le désert

☐ **M58** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

- A La proposition F est absurde
- ■ Dans le désert
- C À une oasis
- D Les deux sont possibles

Pour les questions **M59** et **M60**, on suppose que la proposition suivante est vraie :
Proposition G : Seul un des trois sphinx ment.

☐ **M59** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

- A La proposition G est absurde
- B Dans le désert
- C Les deux sont possibles
- ■ À une oasis

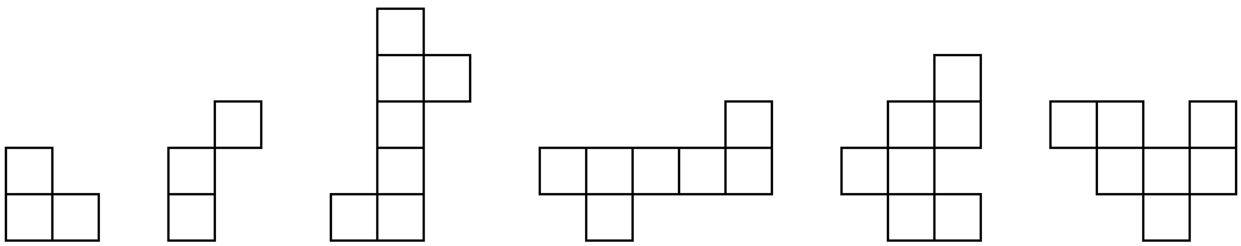
☐ **M60** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

- A Dans le désert
- B La proposition G est absurde
- C À une oasis
- ■ Les deux sont possibles

Exercice 7. Polyominos

Un **polyomino** est un assemblage de carrés de côté 1, appelés « cellules », collés les uns aux autres le long d'un côté. Deux tels assemblages définissent le même polyomino lorsqu'ils peuvent être transformés l'un en l'autre à l'aide de symétries, de rotations ou de translations. Il existe un seul polyomino à une cellule, représenté par un carré de côté 1. De même, il existe un seul polyomino à deux cellules, représenté par deux cellules accolées.

Dans le dessin suivant :



1 2 3 4 5 6

- Toutes les assemblages présentés représentent un polyomino, à l'exception de la figure 2.
- Les assemblages 3 et 4 représentent le même polyomino car on peut obtenir l'un à partir de l'autre à l'aide d'une symétrie d'axe vertical et d'une rotation.

△ **L9** Combien existe-t-il de polyominos à trois cellules ?

△ **L10** Combien existe-t-il de polyominos à quatre cellules ?

☐ **M61** Le nombre de polyominos à cinq cellules est :

■ 12 [B] 8 [C] 5 [D] 15 [E] 10

Un **polyomino unilatéral** est un assemblage de cellules : deux assemblages représentent le même polyomino unilatéral lorsqu'il est possible de transformer l'un en l'autre uniquement à l'aide de rotations ou de translations.

Dans le dessin ci-dessus, les assemblages 5 et 6 représentent le même polyomino et aussi le même polyomino unilatéral, car on peut obtenir l'un à partir de l'autre à l'aide d'une rotation. En revanche, les assemblages 3 et 4 représentent deux polyominos unilatéraux distincts.

☐ **M62** Le nombre de polyominos unilatéraux à trois cellules est :

[A] 3 ■ 2 [C] 1 [D] 4

☐ **M63** Le nombre de polyominos unilatéraux à quatre cellules est :

A 3   B 5   C 4   ■ 7   E 6

☐ **M64** Le nombre de polyominos unilatéraux à cinq cellules est :

A 15   B 17   ■ 18   D 12   E 10

☐ **M65** Le nombre de polyominos à six cellules est :

A 25   B 23   ■ 35   D 31   E 18
